Θεωρία των Κόμβων

ΧΑΡΗΣ Β. ΓΕΩΡΓΙΟΥ
Ερευνητής Πληροφορικής, M.Sc., Ph.D.

Μερικές από τις πιο απλές καθημερινές πράξεις κρύβουν μαθηματικές θεωρίες και προβλήματα απίστευτης πολυπλοκότητας. Οι άνθρωποι έχουν συνηθίσει να τις εκτελούν χωρίς να σκέπτονται το «γενικότερο πρόβλημα» που κρύβεται πίσω από αυτές. Μια τέτοια περίπτωση συνοψίζεται στην πολύ απλή ερώτηση: «Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να δέσω τα κορδόνια των παπουτσιών μου»; Ισως η ερώτηση να φαίνεται παιδαριώδης και καθόλου θεωρητική, όμως αποτελεί την καρδιά ενός πολύ εξειδικευμένου κλάδου των Μαθηματικών. Πρόκειται για την περίφημη «Θεωρία των Κόμβων», αναπόσπαστο πρακτικό εργαλείο του ανθρώπινου πολιτισμού από την εμφάνισή του, η οποία απασχολεί τους μαθηματικούς εδώ και ενάμιση αιώνα, χωρίς ακόμη να έχει αποκαλύψει πλήρως τα μυστικά της.

Για χιλιάδες χρόνια οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν κόμβους για διάφορους σκοπούς, από την καθημερινή πρακτική της στερέωσης και μεταφοράς αγαθών μέχρι την αριθμητική καταγραφή εμπορευμάτων και ημερολογίων. Με την πάροδο του χρόνου, διαπιστώθηκε η διαφορετική χρησιμότητα και αποτελεσματικότητα των κόμβων, ανάλογα με την περίπτωση. Κόμβοι εμφανίζονται σε αναπαραστάσεις και κατασκευές όλων των πολιτισμών, από τους αρχαίους Αιγυπτίους και Ελληνες, τις φυλές ιθαγενών στα τροπικά δάση του Αμαζονίου, τους Ινκας και τους Μάγια, τους Ινδιάνους της Βόρειας Αμερικής, μέχρι τους Βουδιστές μοναχούς του Θιβέτ. Μεσαιωνικά βιβλία όπως το «Βιβλίο των Κελτών» που προέρχεται από Κέλτες μοναχούς του 9ου μ.Χ. αιώνα, περιλαμβάνει ολόκληρες σελίδες στολισμένες με περίτεχνους και πολύπλοκους κόμβους.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η μαθηματική διάσταση των κόμβων πιστεύεται πως μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Carl Friedrich Gauss, τον 19ο αιώνα, όταν πειραματιζόταν με τις ιδιότητες του άγνωστου έως τότε ηλεκτρομαγνητισμού. Η διαπίστωση πως ο ηλεκτρομαγνητισμός συνδέεται άμεσα με το ρεύμα που διαρρέει ένα μεταλλικό σύρμα οδήγησε αναπόφευκτα στη μελέτη της μορφής και των ιδιοτήτων του μαγνητικού πεδίου γύρω από συνεστραμμένους αγωγούς διαφόρων σχημάτων. Λίγο αργότερα, η εργασία των Λόρδου Kelvin και Peter Guthrie Tait προώθησε την κατανόηση και την κατηγοριοποίηση των κόμβων σε μαθηματικό επίπεδο, εν μέρει επειδή οι ίδιοι πίστευαν πως τα άτομα ίσως στην πραγματικότητα δεν ήταν τίποτα άλλο παρά «κόμβοι» στον «αιθέρα» του τρισδιάστατου χώρου. Για παράδειγμα, ο Λόρδος Kelvin πίστευε πως το άτομο του νατρίου ίσως βασιζόταν σε ένα συγκεκριμένο κόμβο (Hopf link) λόγω των δύο γραμμών απορρόφησης που εμφάνιζε στο ορατό φάσμα.

Ενας ακόμα διάσημος φυσικός, ο James Clerk Maxwell, ασχολήθηκε επισταμένα με τις μελέτες των Kelvin και Tait. Αναδιατύπωσε κάποιες από τις αρχικές θεωρίες του Gauss για τους κόμβους, υπό το πρίσμα της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού και ειδικότερα της κίνησης ηλεκτρονίων σε πεπλεγμένες τροχιές που παρομοιάζονταν με τμήματα συγκεκριμένων κόμβων. Ομως, μετά το περίφημο πείραμα των Michelson-Morley το 1887 που κατέρριψε τη θεωρία ύπαρξης του «αιθέρα», η θεωρία διασύνδεσης των φυσικών φαινομένων του ηλεκτρομαγνητισμού και της δομής του ατόμου με τους κόμβους, ουσιαστικά εγκαταλείφθηκε πλήρως.

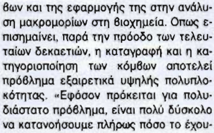
Παρόλα αυτά, η ίδια η μαθηματική θεωρία γύρω από την έννοια των κόμβων αναπτύχθηκε εκ νέου, αυτή τη φορά μέσω της Τοπολογίας στα μαθηματικά, που εδραιώθηκε κυρίως από τον Henri Poincare στις αρχές του 20ού αιώνα. Διάσημοι μαθηματικοί όπως ο Max Dehn, ο J. W. Alexander και ο Kurt Reidemeister ασχολήθηκαν επισταμένα με την τοπολογία των κόμβων. Από αυτές τις μελέτες προέκυψαν πολύ σημαντικές θεωρίες και εργαλεία ανάλυσης, όπως οι «κινήσεις Reidemeister» (Reidemeister moves) και το πολυώνυμο Alexander (Alexander polynomial), ενώ παράλληλα ο Max Dehn κατάφερε να συνδέσει τη θεωρία των κόμβων με τη γενικότερη αλγεβρική θεωρία των ομάδων, δίνοντας νέα πνοή στις σχετικές έρευνες.

Το 1961 ο Wolfgang Haken επινόησε έναν αλγόριθμο «αναγνώρισης» κόμβων, ουσιαστικά ως βάση της επίλυσης του προβλήματος που αφορούσε την ισοδυναμία δύο κόμβων. Στις αρχές της δεκαετίας του 70, οι Friedhelm Waldhausen, Klaus Johannson, William Jaco, Peter Shalen και Geoffrey Hemion ολοκλήρωσαν τη διατύπωση του συγκεκριμένου αλγορίθμου, ενώ το 2003 ο Sergei Matveev επέφερε μερικές κρίσιμες τροποποιήσεις σε αυτόν.

Παρόλα αυτά, το γενικότερο πρόβλημα της αναγνώρισης κόμβων και της ταυτοποίησής τους ως «μοναδικών» εξαρτάται κυρίως από το πλήθος των διασταυρώσεων και βρόχων που περιλαμβάνουν. Για παράδειγμα, υπάρχουν ακριβώς 21 μοναδικοί κόμβοι που περιλαμβάνουν οκτώ εσωτερικές διασταυρώσεις. Το αντίστοιχο σύνολο για εννέα διασταυρώσεις περιλαμβάνει 49 κόμβους, ενώ το σύνολο για δέκα διασταυρώσεις περιλαμβάνει 165 κόμβους. Ομως, το πλήθος των μοναδικών κόμβων αυξάνεται πάρα πολύ γρήγορα σε σχέση με το πλήθος των διασταυρώσεων: για 17 διασταυρώσεις, το αντίστοιχο σύνολο πιστεύεται πως περιλαμβάνει 8.053.249 κόμβους. Οι υπολογιστικές μέθοδοι που υπάρχουν σήμερα θεωρούνται ανεπαρκείς για την αναζήτηση λύσεων σε ανώτερο επίπεδο, καθώς η πολυπλοκότητα των αντίστοιχων αλγορίθμων αυξάνεται εκθετικά και, από κάποιο σημείο και μετά, πρακτικά καθίσταται αδύνατη η εφαρμογή τους και κατά συνέπεια το πρόβλημα γίνεται μη επιλύσιμο.

Τρισδιάστατη απεικόνιση ενός κόμβου τριπλής διασταύρωσης, με ενισχυμένο πάχος νήματος και φωτοσκίαση, ώστε να διακρίνεται το βάθος (τρίτη διάσταση). Αποτελεί τον απλούστερο σύνθετο κόμβο.

Ο μαθηματικός Ken Millett, σημαντικός ερευνητής και καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας, είναι ένας εκ των θεμελιωτών της Θεωρίας των Κόμβων και της εφαρμογής της στην ανάλυση μακρομορίων στη βιοχημεία. Οπως επισημαίνει, παρά την πρόοδο των τελευταίων δεκαετιών, η καταγραφή και η κατηγοριοποίηση των κόμβων αποτελεί πρόβλημα εξαιρετικά υψηλής πολυπλοκότητας. «Εφόσον πρόκειται για πολυδιάστατο πρόβλημα, είναι πολύ δύσκολο να κατανοήσουμε πλήρως πόσο το έχουμε... κατανοήσει» και συνεχίζει λέγοντας «Από μια άποψη, έχουμε προχωρήσει αρκετά, αλλά αν το ερώτημα διατυπωθεί κάπως διαφορετικά, είμαστε ακόμα πολύ πίσω», αναφερόμενος στη δυνατότητα ανάλυσης της πολυπλοκότητας και των συσχετίσεων μεταξύ κόμβων σε καθαρά θεωρητικό επίπεδο. Για παράδειγμα, θεωρητικά είναι γνωστό πως, ακόμα και σε χώρους ανώτερης διάστασης, οι κόμβοι μπορούν να οριστούν ως συνδυασμός πολύ απλών «δομικών» στοιχείων πεπερασμένου πλήθους. Κατά συνέπεια, το σύνολο των διαφορετικών κόμβων που είναι δυνατό να κατασκευαστούν μέσω αυτών είναι επίσης ένα πεπερασμένο σύνολο. Ομως, δεν υπάρχει καμία μαθηματική θεωρία που να μπορεί να υπολογίσει επακριβώς το πλήθος τους.



Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει την πλήρη συλλογή των κόμβων, 21 στο σύνολό τους, που περιλαμβάνουν ακριβώς οκτώ εσωτερικές διασταυρώσεις. Το αντίστοιχο σύνολο για εννέα διασταυρώσεις περιλαμβάνει 49 κόμβους, ενώ το σύνολο για δέκα διασταυρώσεις περιλαμβάνει 165 κόμβους.

Σήμερα το ενδιαφέρον της μελέτης των κόμβων και της αντίστοιχης μαθηματικής θεωρίας εξακολουθεί να παραμένει ενεργό. Το 1992 εκδόθηκε το πρώτο επιστημονικό περιοδικό με αντικείμενο αποκλειστικά τη Θεωρία των Κόμβων και τις προεκτάσεις της, το «Journal of Knot Theory and its Ramifications».

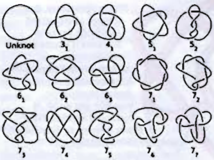
ΜΕΡΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η Θεωρία των Κόμβων αποτελεί αντικείμενο μελέτης στο πεδίο της Τοπολογίας, ενός εξειδικευμένου κλάδου των Μαθηματικών που αφορά τις ιδιότητες και τις πράξεις συνόλων που απεικονίζονται στον χώρο. Γενικά, η Τοπολογία δεν μελετά μόνο σύνολα και χώρους που μπορούν να «οπτικοποιηθούν», δηλαδή να αναπαρασταθούν σε τρισδιάστατη μορφή η οποία να είναι πλήρως κατανοητή από τον άνθρωπο. Αντίθετα, περιλαμβάνει μαθηματικές οντότητες απεριόριστων διαστάσεων, μια πολύ μικρή κατηγορία των οποίων αποτελούν αυτές που είναι δυνατό να απεικονιστούν σε ένα μονοδιάστατο, διδιάστατο ή τρισδιάστατο διάγραμμα.

Ο ανθρώπινος νους μπορεί πολύ εύκολα να κατανοήσει τις τοπολογικές ιδιότητες ενός συνόλου που απεικονίζεται σε μία (άξονας) ή σε δύο διαστάσεις (επίπεδο), αφού η επεξεργασία οπτικοποιημένης αναπαράστασης πληροφοριών, όπως για παράδειγμα ένα διάγραμμα τιμών ημερομηνίας / θερμοκρασίας ή ταχύτητας οχήματος / απόστασης ακινητοποίησης, πραγματοποιείται πολύ αποτελεσματικά από τον εγκέφαλο. Στην πρώτη περίπτωση, από το διάγραμμα μπορεί πολύ εύκολα κάποιος να αναγνωρίσει πως η μορφή της κατανομής των τιμών ημερομηνίας / θερμοκρασίας ή αλλιώς η «τοπολογία» του συγκεκριμένου συνόλου, ταιριάζει πολύ καλά σε μια ημιτονοειδή καμπύλη, αφού η αυξομείωση της θερμοκρασίας είναι όντως περιοδική, ανάλογα με την εποχή του έτους. Κατάναλογία, από το διάγραμμα της δεύτερης περίπτωσης μπορεί κάποιος να αναγνωρίσει αμέσως πως η μορφή της κατανομής των τιμών ταχύτητας οχήματος / απόστασης ακινητοποίησης, δηλαδή η «τοπολογία» του συγκεκριμένου συνόλου, δεν είναι γραμμική και ταιριάζει πολύ καλά σε μια πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού. Πράγματι, η απαιτούμενη απόσταση για την ακινητοποίηση ενός οχήματος είναι ανάλογη της κινητικής του ενέργειας, δηλαδή ανάλογη του τετραγώνου της αρχικής του ταχύτητας. Αντίστοιχη επεξεργασία οπτικοποιημένης πληροφορίας σε τρεις διαστάσεις είναι εξίσου αποτελεσματική από τον ανθρώπινο εγκέφαλο, όμως επειδή τα μέσα απεικόνισης που συνήθως χρησιμοποιούνται (σε συμβατικές οθόνες ή σε χαρτί) δεν μπορούν να αναδείξουν σωστά την τρίτη διάσταση («βάθος»), η επεξεργασία και η σωστή κατανόηση τρισδιάστατων τοπολογιών καθίσταται κάπως δυσκολότερη για τον άνθρωπο. Για διαστάσεις από τέσσερις και άνω, η ανθρώπινη αντίληψη είναι εξαιρετικά περιορισμένη και γενικά δεν μπορεί να κατανοήσει παρόμοιες τοπολογίες, καθώς η πλήρης οπτικοποίησή τους δεν είναι δυνατή.

Με μαθηματικούς όρους, κάθε κόμβος αποτελεί την «ενθυλάκωση» ενός κύκλου στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Πρακτικά, αυτό σημαίνει πως δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο μετασχηματισμός («τύλιγμα») ενός κυκλικού νήματος με κινήσεις στον τρισδιάστατο χώρο. Επιπλέον, επιτρέπεται το νήμα αυτό αρχικά να μη είναι «κλειστό», δηλαδή τα δύο άκρα του να κινούνται ελεύθερα και να ενώνονται μόνο κατά την ολοκλήρωση του σχήματος, ώστε να μη «λύνεται» αυτόματα. Ετσι, ένας κόμβος που περιλαμβάνει διασταυρώσεις και «θηλιές» είναι δυνατό να μη μπορεί με κανέναν τρόπο να «ξετυλιχθεί» εντελώς σε έναν απλό κύκλο. Η σύνθετη αυτή τοπολογία που προκύπτει αποτελεί τη βάση της μελέτης στη Θεωρία των Κόμβων, δηλαδή την ανάλυση των στοιχειωδών μετασχηματισμών και των ιδιοτήτων τους σε αυτό τον χώρο.

Κάθε κόμβος μπορεί εν γένει να αποσυντεθεί σε απλούστερα δομικά στοιχεία ή «στοιχειώδεις κόμβους», δηλαδή κόμβους που δεν είναι δυνατό να αναλυθούν περαιτέρω. Αντίστροφα, ο συνδυασμός τέτοιων στοιχειωδών κόμβων μεταξύ τους «παράγει» πολύ πιο σύνθετους κόμβους. Η διαδικασία αυτή μοιάζει αρκετά με την παραγοντοποίηση ενός αριθμού σε πρώτους παράγοντες. Κατά μία έννοια, οι στοιχειώδεις κόμβοι είναι ό,τι ακριβώς οι «πρώτοι αριθμοί» για τους αριθμούς, δηλαδή δημιουργούν άπειρους συνδυασμούς και αποτελέσματα, όχι μέσω πολλαπλασιασμού, όπως στους πρώτους αριθμούς, αλλά μέσω «πρόσθεσης»



Πίνακας με τους κύριους κόμβους που περιλαμβάνουν έως επτά διασταυρώσεις. Η ονοματολογία των κόμβων είναι σύμφωνη με την αναπαράσταση Alexander-Briggs.

απλών κόμβων μεταξύ τους. Δεν είναι καθόλου περίεργο το γεγονός ότι, τόσο η ανάλυση ενός μεγάλου αριθμού σε πρώτους παράγοντες (παραγοντοποίηση), όσο και η αποσύνθεση ενός σύνθετου κόμβου σε πολλούς απλούστερους, αποτελούν μαθηματικά προβλήματα μεγάλης υπολογιστικής πολυπλοκότητας.

«ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ» ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΟΜΒΩΝ

Στο αρχικό ερώτημα, σχετικά με το πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι δεσίματος των κορδονιών ενός παπουτσιού, δηλαδή πόσοι διαφορετικοί κόμβοι είναι δυνατό να σχεδιαστούν και να καταγραφούν, αναπόφευκτα προστίθεται και ένα δεύτερο ερώτημα: Πώς μπορούν δύο κόμβοι να συγκριθούν και να ταυτοποιηθούν ως «ισοδύναμοι»; Για την απάντησή του, θα πρέπει πρωτίστως να καθοριστεί με ακρίβεια τι σημαίνει «ισοδύναμοι» κόμβοι.

Πρακτικά, ισοδυναμία μεταξύ κόμβων σημαίνει να μπορεί να προκύψει ο ένας από τον άλλο μέσω απλών μετακινήσεων και μετασχηματισμών, «ξετυλίγματος» και «τυλίγματος» των νημάτων, έτσι ώστε η ταύτιση να μπορεί να γίνει χωρίς να απαιτείται το κόψιμο και η επανασύνδεση του νήματος. Ο τυπικός μαθηματικός ορισμός είναι κάπως αυστηρότερος και καθορίζει την ισοδυναμία κόμβων ως την «παραμόρφωση» του ίδιου του Ευκλείδειου χώρου μέσω μιας σειράς μετασχηματισμών που «μεταμορφώνουν» τον ένα κόμβο στον άλλο.

Ο περιορισμός είναι ότι, για να πραγματοποιηθεί αυτό, δεν επιτρέπεται το κόψιμο του νήματος ή η δίοδος μέσα από τον εαυτό του, με άλλα λόγια το κάθε νήμα πρέπει να διατηρεί τις «φυσικές» ιδιότητες ενός βρόχου από σχοινί.

Η φυσική εξήγηση της εύρεσης μιας «λύσης» ισοδυναμίας, δηλαδή μιας σειράς τέτοιων στοιχειωδών μετασχηματισμών που τελικά να ταυτοποιούν δύο κόμβους, είναι απλή και αρκετά διαισθητική: Ο κόμβος θεωρείται ότι βυθίζεται σε υγρό με σχετικά υψηλή πυκνότητα (ιξώδες) και «κινείται ομαλά» προς μία κατεύθυνση, έτσι ώστε λόγω της τριβής σταδιακά να «ξετυλίγεται» μέσα στο υγρό. Αν το τελικό σχήμα των δύο προς σύγκριση κόμβων είναι το ίδιο, ως προς τις διασταυρώσεις και τους βρόχους, τότε οι δύο αρχικοί κόμβοι θεωρούνται ισοδύναμοι.

Η διαισθητική αυτή εξήγηση της μελέτης της ισοδυναμίας μεταξύ κόμβων αποτελεί τη βάση πολλών μαθηματικών «αναλλοίωτων» (invariants), δηλαδή κωδικοποίησης των στοιχειωδών μετασχηματισμών και των μέτρων που τις ποσοτικοποιούν, ώστε να καθίσταται δυνατή η σύγκριση δύο οποιωνδήποτε κόμβων. Σκοπός της χρήσης τέτοιων «αναλλοίωτων» μετρικών είναι ακριβώς η δυνατότητα μοναδικής ταυτοποίησης κάθε κόμβου, ανεξάρτητα από τις εκάστοτε παραλλαγές του ή τις διαφορές στον τρόπο που απεικονίζεται. Πράγματι, το 1927 ο μαθηματικός J. W. Alexander δημιούργησε μια τέτοια μετρική βασισμένη σε πολυωνυμική αναπαράσταση, η οποία κωδικοποιεί τους συνδέσμους και τις διασταυρώσεις που περιλαμβάνει κάθε κόμβος. Το πρόβλημα όμως της ταυτοποίησης των κόμβων δεν επιλύθηκε αποτελεσματικά, καθώς η συγκεκριμένη μετρική του Alexander διευκόλυνε την απλή και μαθηματικώς ορισμένη αναπαράσταση ενός κόμβου, όμως αυτή δεν ταυτοποιούσε με μοναδιαίο τρόπο τους κόμβους. Με άλλα λόγια, δύο εγγενώς διαφορετικοί κόμβοι μπο-

Διαγραμματική (διδιάστατη) αναπαράσταση του κόμβου τριπλής διασταύρωσης, όπου διακρίνονται τα σημεία διάκρισης του «επάνω» και του «κάτω» νήματος στα σημεία διασταύρωσης. Θεωρητικά, τα διαγράμματα κόμβων προκύπτουν από την προβολή («σκιά») ενός κόμβου πάνω σε ένα επίπεδο.

ρούσαν να εμφανίζουν ακριβώς την ίδια «αναλλοίωτη» μετρική Alexander.

Επί έξι δεκαετίες, η «αναλλοίωτη» Alexander αποτελούσε ίσως το μοναδικό ισχυρό εργαλείο για τους μαθηματικούς όσον αφορά τη Θεωρία των Κόμβων, παρά τα όποια προβλήματα. Το 1983, ο Vaughn Jones του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας, εξέπληξε τους πάντες διατυπώνοντας μια «αναλλοίωτη» μετρική σημαντικά καλύτερη από αυτή του Alexander, καθώς μπορούσε να ταυτοποιήσει με μοναδιαίο τρόπο πολύ περισσότερους κόμβους. Λίγο αργότερα, το 1988, ο Edward Witten του Ινστιτούτου Προηγμένων Μελετών του Princeton κατόρθωσε να μετατρέψει την «αναλλοίωτη» μετρική του Jones σε μια τεράστια συλλογή παραλλαγών, βασισμένος στη μαθηματική σύνδεση μεταξύ της Θεωρίας των Κόμβων και της Κβαντομηχανικής. Οι δύο αυτές σημαντικές ανακαλύψεις αποτέλεσαν τη βάση για την απονομή του Fields Medal, μια από τις υψηλότερες διακρίσεις παγκοσμίως στα Μαθηματικά, στους Jones και Witten, το 1990.

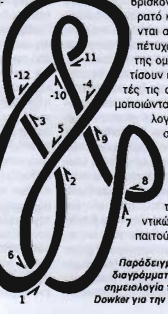
Μέχρι πρόσφατα, δεν υπήρχε μαθηματική απόδειξη ότι είναι δυνατόν ο κόμβος που απεικονίζεται στο σχήμα να «ξετυλιχθεί» διασταυρώνοντας τα άκρα του νήματος ακριβώς μία φορά. Η ομολογία κόμβων Floer έκανε δυνατή τη διατύπωση μιας τέτοιας απόδειξης.

Παράδειγμα ισοδυναμίας κόμβων. Αν και οι παραπάνω κόμβοι φαίνονται εντελώς διαφορετικοί, εντούτοις με την εφαρμογή κατάλληλων μετασχηματισμών («έλξης») χωρίς να διακοπεί η συνέχειά τους, μπορεί να μετατραπεί ο ένας στον άλλο.

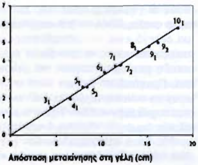
Παρά τη σημαντική θεωρητική εργασία πάνω στις νέες αυτές «αναλλοίωτες» μετρικές, η πρόοδος στην ίδια τη φύση της Θεωρίας των Κόμβων και την κατανόησή της δεν είχε πραγματοποιήσει αντίστοιχα βήματα προόδου. Ακόμα και με αυτά τα νέα «υπολογιστικά» εργαλεία στη διάθεσή τους, οι μαθηματικοί δεν ήταν ακόμα σε θέση να αποσαφηνίσουν τις εγγενείς ιδιότητες και τις συσχετίσεις μεταξύ κόμβων, παρά μόνο να συγκρίνουν μεμονωμένες περιπτώσεις. Στα τέλη της δεκαετίας του 90, το θεωρητικό αυτό εμπόδιο φάνηκε να υπερνικάται από τον Mikhail Khovanov του Πανεπιστημίου Columbia. Ο Khovanov, χρησιμοποιώντας φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους τεχνικές από την Άλγεβρα, κατάφερε να διατυπώσει μια νέα θεωρία (Khovanov homology) για μια «αναλλοίωτη» μετρική που λειτουργούσε καλύτερα ακόμα και από τα πολυώνυμα του Jones. Παράλληλα, ο Peter Ozsvath επίσης από το Πανεπιστήμιο Columbia και ο Zoltan Szabo από το Πανεπιστήμιο του Princeton, ανέπτυξαν μια παρόμοια θεωρία (knot Floer homology) για μια αντίστοιχη «αναλλοίωτη» μετρική, βασισμένοι σε τεχνικές της Συμπλεκτικής Γεωμετρίας, ενός κλάδου της Γεωμετρίας με σημαντικές εφαρμογές στη Φυσική. Και οι δύο αυτές νέες «αναλλοίωτες» μετρικές κατάφεραν, όχι απλώς να διατυπώσουν μια καλύτερη κωδικοποιημένη αναπαράσταση κόμβων που βοηθά στην ταυτοποίησή τους, αλλά και να οδηγήσουν στην ανάδειξη εγγενών συσχετίσεων και χαρακτηριστικών που επέτρεψαν τη σε βάθος κατανόηση της φύσης της Θεωρίας των Κόμβων.

Ένα εξίσου σημαντικό στοιχείο των δύο αυτών νέων «αναλλοίωτων» μετρικών ήταν το γεγονός ότι, παρόλο που βασίστηκαν σε εντελώς διαφορετικές τεχνικές και μαθηματικές θεωρίες, τελικά κατέληξαν σε παρόμοιες διατυπώσεις και εγγενείς συσχετίσεις μεταξύ τους, τις οποίες μόλις πρόσφατα οι μαθηματικοί άρχισαν να κατανοούν. Δεν είναι τυχαίο ότι σήμερα πλήθος θεωρητικών φυσικών προσπαθούν να επεκτείνουν και να συνδέσουν τις εργασίες πάνω στις συγκεκριμένες «αναλλοίωτες» μετρικές με τη Θεωρία των Υπερχορδών (String Theory), μια από τις επικρατέστερες σήμερα θεωρίες για τον τίτλο της Μεγάλης Ενοποιημένης Θεωρίας (Grand Unified Theory) σχετικά με τη φύση του ίδιου του Σύμπαντος. Στην Κβαντομηχανική, και ειδικότερα στον κλάδο της Κβαντικής Τοπολογίας, οι φυσικοί μελετούν τη σύνδεση της κβαντομηχανικής με την τοπολογία χαμηλών διαστάσεων, με στόχο τον χαρακτηρισμό των ιδιοτήτων φαινομένων όπως η κβαντική συσχέτιση με μαθηματικούς όρους Τοπολογίας, δηλαδή του ίδιου του τετραδιάστατου χώρου μέσα στον οποίο συμβαίνουν.

Πρόσφατα, μια ομάδα επιστημόνων από τα Πανεπιστήμια του Bristol, της Γλασκώβης και του Southampton, κατάφεραν να κατασκευάσουν μια συσκευή ολογραφικής προβολής μέσω λέιζερ, βασισμένη εν μέρει στη Θεωρία των Κόμβων. Όπως εξηγεί ο Mark Dennis, ένας εκ των επιστημόνων της ομάδας, μια ακτίνα φωτός που διαχέεται από μια πηγή στον χώρο διαδίδεται με παρόμοιο τρόπο όπως το νερό που ρέει σε ένα ποτάμι. Αν και συνήθως η διάδοση πραγματοποιείται σε ευθεία γραμμή, όπως από ένα κερί ή από ένα λέιζερ, εντούτοις μπορεί να σχηματίσει και «στροβίλους» και «ρεύματα» που ονομάζονται «οπτικές δίνες». Κατά μήκος αυτών των δινών η ένταση του φωτός είναι μηδέν, δηλαδή πρακτικά αποτελούν «μαύρες» περιοχές, οι οποίες βρίσκονται παντού στον ορατό κόσμο αλλά δεν γίνονται αντιληπτές. Αυτό που πέτυχαν οι επιστήμονες της ομάδας ήταν να σχηματίσουν κόμβους μέσα σε αυτές τις οπτικές δίνες, χρησιμοποιώντας εξειδικευμένες ολογραφικές τεχνικές. Η συγκεκριμένη εργασία, που δημοσιεύτηκε πρόσφατα στο περιοδικό Nature Physics (2011), αποτελεί τη βάση μελλοντικών εφαρμογών που απαιτούν εξαιρετική διαχεί-



Παράδειγμα διδιάστατου διαγράμματος κόμβου, με σημειολογία τύπου ακολουθίας Dowker για την κωδικοποίησή του.



Διάγραμμα απεικόνισης της απόστασης μετακίνησης τμημάτων μορίων DNA σε πείραμα ηλεκτροφόρησης. Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο μέσο πλήθος διασταυρώσεων στα συνεστραμμένα «νήματα» του μορίου. Ο κάθετος άξονας αντιστοιχεί στην απόσταση μετακίνησης μέσα στη γέλη (electrophoretic gel). Ο αριθμός σε κάθε σημείο είναι βάσει αναπαράστασης Alexander.

ριση σε ηλεκτρονικά στοιχεία οπτικής τεχνολογίας και καταδεικνύει πώς ένας καθαρά θεωρητικός κλάδος της επιστήμης είναι δυνατό να βρει εφαρμογή σε πρακτικό επίπεδο.

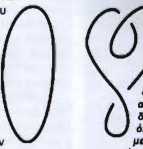
Οπως έχει επισημανθεί από τους επιστήμονες που ασχολούνται με την έρευνα στους παραπάνω τομείς, τόσο η θεωρία του Khovanov (Khovanov homology), όσο και η αντίστοιχη των Ozsvath και Szabo (knot Floer homology), φαίνεται να είναι εξαιρετικά αποτελεσματικές στη μελέτη τρισδιάστατων και τετραδιάστατων χώρων. Ειδικά η δεύτερη περίπτωση, αυτή του τετραδιάστατου χώρου, είναι ακριβώς εκείνη που απασχολεί τους θεωρητικούς φυσικούς. Μάλιστα, έχει διατυπωθεί η άποψη ότι χώροι με μικρότερες διαστάσεις (μία ή δύο) είναι εξαιρετικά περιοριστικοί όσον αφορά την «αυθόρμητη» εμφάνιση πολύπλοκης συμπεριφοράς, ενώ σε χώρους με μεγαλύτερες διαστάσεις (πέντε ή περισσότερες), ο ίδιος ο χώρος εμπεριέχει από μόνος του επαρκή πολυπλοκότητα ώστε οποιαδήποτε τέτοια συμπεριφορά να «απλοποιείται» από μόνη της.

ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΚΟΜΒΩΝ

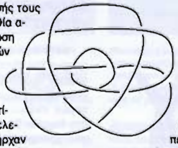
Μέχρι πρόσφατα, η κατηγοριοποίηση των κόμβων γινόταν απλά με βάση το πλήθος των διασταυρώσεων που περιελάμβαναν. Στους αντίστοιχους πίνακες καταλογογράφησης, περιλαμβάνονται κατά κανόνα μόνο «κύριοι» κόμβοι, χωρίς αντίστοιχη καταχώριση των συμμετρικών τους. Ο αριθμός των κόμβων που προκύπτουν βάσει του πλήθους διασταυρώσεων αυξάνεται πολύ γρήγορα, καθιστώντας τον υπολογισμό τους εξαιρετικά δύσκολο ακόμα και για διασταυρώσεις μόλις πάνω από 16.

Η καταχώριση και κατηγοριοποίηση των κόμβων προϋποθέτει μια αποτελεσματική μέθοδο κωδικοποίησής τους με αριθμούς ή ακολουθία αριθμών. Η διατύπωση «αναλλοίωτων» μετρικών όπως τα πολυώνυμα Alexander διευκόλυναν αυτή την περίπλοκη εργασία, όμως αντίστοιχες, λιγότερο αποτελεσματικές, μέθοδοι υπήρχαν και παλαιότερα. Από αυτές, οι δύο απλούστερες και γνωστότερες είναι η αναπαράσταση κόμβων μέσω ακολουθίας Dowker-Thistlethwaite και η αναπαράσταση Conway, σύμφωνα με τις εργασίες των ομώνυμων επιστημόνων, Clifford Hugh Dowker, Morwen Thistlethwaite και Horton Conway.

Η αναπαράσταση ακολουθίας Dowker (Dowker notation) ή αλλιώς μέσω κώδικα Dowker-Thistlethwaite, βασίζεται στον χαρακτηρισμό κάθε διασταύρωσης στο διδιάστατο διάγραμμα του κόμβου με έναν ακέραιο αριθμό. Το νήμα του κόμβου διατρέχεται σε όλο του το μήκος και κάθε διασταύρωση χαρακτηρίζεται με έναν ακέραιο. Καθώς η επίσκεψη σε κάθε διασταύρωση γίνεται δύο φορές, μία από τον ένα κλάδο και μία από τον άλλο, το συνολικό πλήθος των ακεραίων είναι πάντα άρτιος αριθμός. Επιπλέον, στο ζεύγος των αριθμών που αντιστοιχεί σε κάθε διασταύρωση, ο ένας καταχωρείται με θετικό πρόσημο και ο άλλος με αρνητικό, ώστε να συμβολιστεί ακριβώς ότι το ένα νήμα βρίσκεται «πάνω» από το άλλο. Ο ακριβής κανόνας σχετικά με



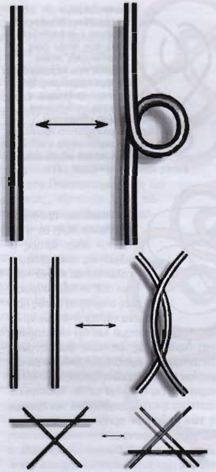
Στα αριστερά, ο τετριμμένος κόμβος-βρόχος («unknot») και ακριβώς δίπλα ένας ισοδύναμος απλός κόμβος που περιλαμβάνει δύο διασταυρώσεις. Στο γενικότερο πρόβλημα, η απόδειξη της ισοδυναμίας αποτελεί ένα εξαιρετικά δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα, όπως για παράδειγμα η σύγκριση με ένα πολύπλοκο κόμβο όπως αυτός που απεικονίζεται κάτω.



την απόδοση προσήμου προβλέπει πως, αν η «ετικέτα» είναι άρτιος αριθμός και το νήμα που ακολουθείται περνά «πάνω» από τη διασταύρωση, τότε ο αριθμός αυτός πρέπει να καταχωρηθεί με αρνητικό πρόσημο. Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας, σε κάθε διασταύρωση θα αντιστοιχεί ένα ζεύγος αριθμών εκ των οποίων ο ένας θα είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Για τον λόγο αυτόν, πρακτικά απαιτείται η καταχώρηση μόνο των πρώτων ή των δεύτερων αριθμών κάθε τέτοιου ζεύγους. Σύμφωνα με την αναπαράσταση μέσω του κώδικα Dowker-Thistlethwaite, ο κόμβος που αντιπροσωπεύεται από την αντίστοιχη ακολουθία αριθμών είναι ο αρχικός κόμβος ή ο συμμετρικός του. Για αυτόν τον λόγο, η καταχώρηση κόμβων στους αντίστοιχους πίνακες δεν διαφοροποιεί τις περιπτώσεις συμμετρικών κόμβων.

Η αναπαράσταση Conway είναι σημαντικά πιο περίπλοκη, καθώς βασίζεται σε πράξεις και κωδικοποιημένη αναπαράσταση αλγεβρικών δομών. Η αντίστοιχη θεωρία των «συστροφών» του Conway περιγράφει ακριβώς πώς μπορεί ένας σύνθετος κόμβος να αποσυντεθεί και να αναπαρασταθεί ως ένα σύνολο, με τέτοιον τρόπο ώστε να μη καταχωρείται μόνο το πλήθος των διασταυρώσεων του

Παράδειγμα δύο ισοδύναμων, «τετριμμένων» κόμβων.



Οι τρεις τύποι στοιχειωδών «κινήσεων» Reidemeister για τον χαρακτηρισμό σύνθετων κόμβων: Δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη συστροφή (Τύπος 1), μετακίνηση ενός νήματος πάνω ή κάτω από κάποιο άλλο (Τύπος 2) και μετακίνηση ενός νήματος πάνω ή κάτω από κάποια διασταύρωση (Τύπος 3).

κόμβου αλλά και πρόσθετα χαρακτηριστικά τους, δημιουργώντας μια πιο πλούσια αναπαράσταση από την αντίστοιχη μέσω κώδικα Dowker-Thistlethwaite.

Τέλος, όπως αναφέρθηκε ήδη, η αναπαράσταση μέσω της «αναλλοίωτης» μετρικής Alexander βασίζεται στα αντίστοιχα πολυώνυμα Alexander-Conway. Πρακτικά, τα πολυώνυμα αυτά καθορίζονται ως σύνδεσμοι που αποτελούνται από δύο ή περισσότερους κόμβους «συνεστραμμένους» μεταξύ τους. Ο ορισμός του κάθε πολυωνύμου είναι αναδρομικός και περιλαμβάνει έλεγχο σχετικά με το αν παραμένει «αναλλοίωτο» με την εφαρμογή των τριών βασικών «κινήσεων Reidemeister». Αν και ως κώδικας αναπαράστασης δεν είναι τίποτα περισσότερο από κατηγοριοποίηση με βάση το πλήθος των διασταυρώσεων, εντούτοις τα πολυώνυμα Alexander-Conway αποτελούν τη βάση της αντίστοιχης «αναλλοίωτης» μετρικής και κατά συνέπεια αποτελούν μια θεωρητικά συνεπή και εύρωστη τεχνική. Η τελική μορφή του κώδικα αναπαράστασης αποτελείται από ένα και μόνο ακέραιο αριθμό, που υποδεικνύει το πλήθος των διασταυρώσεων, και ένα δείκτη κάτω δεξιά από αυτόν, που υποδεικνύει τη θέση του στην τυπική ταξινόμηση των κόμβων αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΩΡΙΑ ΚΟΜΒΩΝ ΚΑΙ «ΣΥΝΕΣΤΡΑΜΜΕΝΟ» DNA

Κατά τις τελευταίες δύο περίπου δεκαετίες του 20ού αιώνα οι επιστήμονες άρχισαν να ανακαλύπτουν εφαρμογές της Θεωρίας των Κόμβων σε προβλήματα διαφόρων κλάδων, όπως στη Βιολογία και στη Χημεία. Τα ίδια θεωρητικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των κόμβων μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη της μορφής και των χημικών ιδιοτήτων μορίων, ειδικότερα ως προς την «τοποϊσομέρεια», δηλαδή τις διάφορες παραλλαγές στη χωρική διάταξη των συστατικών του ίδιου μορίου.

Με ανάλογο τρόπο, η μελέτη των «συστρεφόμενων» μορίων DNA αποκαλύπτει τη δράση συγκεκριμένων ενζύμων στο «ξετύλιγμα» τέτοιων σχηματισμών. Η γενικότερη «φυσική» Θεωρία των Κόμβων αποτελεί το διεπιστημονικό πεδίο μελέτης των μαθηματικών μοντέλων που βασίζονται σε φυσικά φαινόμενα και συστήματα, όπως αυτά που εμφανίζονται σε μόρια DNA ή πολυμερών υλικών.

Ο κύριος λόγος ενασχόλησης των επιστημόνων της Γενετικής Μηχανικής με τη Θεωρία των Κόμβων είναι ακριβώς η στενή σχέση που υφίσταται, τουλάχιστον σε θεωρητικό επίπεδο, μεταξύ των μαθηματικών κόμβων και του «συνεστραμμένου» μορίου του DNA. Από τη στιγμή που οι James Watson και Francis Crick το 1953 ανακάλυψαν ότι ο βασικός δομικός λίθος της ζωής, όπως τη γνωρίζουμε, είναι ένα μακρομόριο πεπλεγμένης διπλής αλυσίδας νουκλεϊκών οξέων, δηλαδή το μόριο του DNA, η συσχέτιση με τους κόμβους και τη μαθηματική θεωρία πίσω από αυτούς ήταν ευλόγως αναμενόμενη.

Ολες οι βιοχημικές διεργασίες που πραγματοποιούνται στα μόρια του DNA ή διαμέσου αυτών, όπως για παράδειγμα η αντιγραφή του ή η παραγωγή πρωτεϊνών βάσει συγκεκριμένων γονιδίων, προϋποθέτει ότι οι κλάδοι του DNA είναι «ξετυλιγμένοι», έτσι ώστε να πραγματοποιηθούν οι χημικές αντιδράσεις. Τον ρόλο αυτό αναλαμβάνουν εξειδικευμένα ένζυμα, οι λεγόμενες «τοποϊσομεράσες», οι οποίες είναι ικανές να προκαλούν τοπολογικούς μετασχηματισμούς σε μακρομόρια. Πρακτικά, τα ένζυμα αυτά αποπλέκουν το συνεστραμμένο μόριο του DNA, που συχνά περιλαμβάνει εξαιρετικά πολύπλοκες δομές και κόμβους. Επιπλέον, η ακριβής δομή και συμμετρία των μορίων των πρωτεϊνών, δηλαδή η μορφή τους στον τρισδιάστατο χώρο, αποτελεί ζήτημα εξαιρετικής σημασίας σχετικά με τη δράση τους σε βιοχημικό επίπεδο. Κατά συνέπεια, το γενικότερο πρόβλημα του «ξετυλίγματος» του DNA είναι δυνατό να μελετηθεί με όρους μαθηματικής Τοπολογίας, δηλαδή ακριβώς όπως και οι κόμβοι στην αντίστοιχη θεωρία.

Πρόσφατες εργασίες στη Βιοϊατρική και στη Βιοπληροφορική έχουν καταδείξει τη σημασία της Θεωρίας των Κόμβων και ιδιαίτερα των «αναλλοίωτων» μετρικών στον χαρακτηρισμό μορίων DNA και μάλιστα με ποσοτικοποιημένο τρόπο. Συγκεκριμένα, μέσω «αναλλοίωτων» όπως τα πολυώνυμα Alexander ή η θεωρία των Khovanov και Ozsvath-Szabo, το «συνεστραμμένο» μόριο του DNA μπορεί να αξιολογηθεί ως προς την ευκολία ή δυσκολία αντίδρασής του με κάποιο ένζυμο, καθώς όσο πιο πεπλεγμένο εμφανίζεται, τόσο δυσκολότερη γίνεται η χημική αντίδραση. Αντίστοιχα, η δράση ενός ενζύμου που δρα ως «αποπλέκτης» του DNA μπορεί να αξιολογηθεί με βάση το πόσο γρήγορα μπορεί να «ξετυλίξει» ένα μόριο γνωστής πολυπλοκότητας σύμφωνα με μια συγκεκριμένη «αναλλοίωτη» μετρική για κόμβους. Με άλλα λόγια, αντιμετωπίζοντας το «συνεστραμμένο» μόριο του DNA ως μαθηματικό κόμβο, είναι δυνατό

Φωτογραφία πολύπλοκων σχεδίων κόμβων από το ηλικίας 1.200 ετών «Βιβλίο των Κελτών».

να εκτιμηθεί πόσο γρήγορα μπορεί να «ξετυλιχθεί» και να λάβει μέρος σε μια χημική αντίδραση.

Σε πειράματα που έχουν πραγματοποιηθεί στο εργαστήριο, διαπιστώνεται πως πράγματι ο χαρακτηρισμός τμημάτων μορίων DNA με βάση «αναλλοίωτες» μετρικές από τη Θεωρία των Κόμβων αποκαλύπτει την άμεση συσχέτιση μεταξύ των δύο εντελώς διαφορετικών επιστημονικών πεδίων. Μια από τις πιο απλές μεθόδους καθορισμού του πλήθους διασταυρώσεων σε ένα μόριο DNA είναι μέσω της ηλεκτροφόρησης: η απόσταση στην οποία κινούνται τα διάφορα τμήματα DNA είναι ευθέως ανάλογη προς τον μέσο αριθμό διασταυρώσεων που περιέχουν. Με άλλα λόγια, υφίσταται στατιστική συσχέτιση μεταξύ των δύο παραμέτρων η οποία μάλιστα υποδεικνύει γραμμική εξάρτηση: όσο περισσότερες είναι οι διασταυρώσεις μέσα στο μόριο, τόσο μεγαλύτερη αναλογικά είναι η μετακίνησή του. Το αποτέλεσμα αυτό από μόνο του είναι αρκετό για να αποκαλύψει πόσο σημαντική και χρήσιμη είναι η εφαρμογή των «αναλλοίωτων» μετρικών για κόμβους στη μελέτη μακρομορίων στη Βιοχημεία.

Παρόλα αυτά, η σημερινή μαθηματική θεωρία παραμένει ανεπαρκής για την πλήρη ανάλυση μακρομορίων στο εργαστήριο μέσω των τεχνικών που εφαρμόζονται στους κόμβους. Είναι χαρακτηριστικό πως σε αντίστοιχες μετρήσεις μορίων DNA έχουν επιβεβαιωθεί σχηματισμοί κόμβων τόσο πολύπλοκοι, ώστε εκτιμάται ότι περιλαμβάνουν έως και 5.000 διασταυρώσεις. Αξίζει να επισημανθεί πως μόλις για 17 διασταυρώσεις υπάρχουν πάνω από οκτώ εκατομμύρια κύριοι κόμβοι!

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Με μια πρώτη ματιά, η Θεωρία των Κόμβων αποτελεί περισσότερο πρακτικό και «τεχνικό» ζήτημα, παρά το αντικείμενο βασικής έρευνας σε έναν πολύ εξειδικευμένο και πολυσύνθετο κλάδο των Μαθηματικών, άποψη που ενισχύεται από τη σύνδεση της θεωρίας αυτής με ένα πλήθος άλλων επιστημονικών κλάδων, όπως η Βιοχημεία, η Γενετική Μηχανική, η Κβαντομηχανική και η Θεωρητική Φυσική.

Η μελέτη όμως των εγγενών χαρακτηριστικών των κόμβων και των θεωρητικών ιδιοτήτων που τους διέπουν, 150 και πλέον χρόνια από την έναρξή της, αποτελεί έναν από τους τομείς των Μαθηματικών που μόλις τώρα αρχίζει να αποκαλύπτεται στην πλήρη του διάσταση. Ένα τόσο απλό πρόβλημα, όπως το δέσιμο σε κόμπο μιας κλωστής ή των κορδονιών του παπουτσιού, δηλαδή μια καθημερινή ενέργεια που φαίνεται εξαιρετικά απλή και τετριμμένη, κρύβει ένα απίστευτα πολύπλοκο μαθηματικό αίνιγμα. ■

Φωτογραφία τμήματος μορίου DNA από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, με σαφή «ξετυλιγμένη» μορφή κόμβου, όπως έχει σχηματιστεί από τοποϊσομεράση σε κυκλικό μόριο DNA του βακτηριδίου E.coli.

Φωτογραφία τμήματος μορίου DNA από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο. Διακρίνεται ξεκάθαρα η τρισδιάστατη δομή και η διάταξη των συνεστραμμένων «νημάτων» του σε μορφή που μοιάζει πολύ με κόμβο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(1) Wikipedia, KNOT THEORY (article), 10 Mar 2011, http://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory

(2) Wikipedia, HISTORY OF KNOT THEORY (article), 3 Jul 2010, http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_knot_theory

(3) Wikipedia, LIST OF MATHEMATICAL KNOTS AND LINKS, 28 Mar 2010, http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mathematical_knots_and_links

(4) Julie Rehmeyer, UNKNOTTING KNOT THEORY, Science News, 31 Oct 2008, http://www.sciencenews.org/view/generic/id/38237

(5) Oracle ThinkQuest Education Foundation, KNOT THEORY APPLICATIONS, 30 Mar 2011, http://library.thinkquest.org/12295/data/Applications/Data.html

(6) Margaret Wertheim, Ken Millett: WHERE THE WILD THINGS ARE: AN INTERVIEW WITH KEN MILLETT, Cabinet Magazine, Issue 20, 2006, http://www.cabinetmagazine.org/issues/20/wertheim.php

(7) M. Beals, L. Gross, S. Harrell: DNA AND KNOT THEORY, 1999, http://www.tiem.utk.edu/bioed/webmodules/DNAknot.html

(8) The Telegraph (UK), A TEAM OF SCIENTISTS MANAGED TO 'TIE LIGHT IN KNOTS', 8 Jan 2010, http://www.telegraph.co.uk/science/science-news/7012307/A-team-of-scientists-managed-to-tie-light-in-knots.html

(9) P. O. Brown, N. R. Cozzarelli: A SIGN INVERSION MECHANISM FOR ENZYMATIC SUPERCOILING OF DNA, Science, Issue 206, 1979, pp. 1081-1083.

(10) W. Menasco, L. Rudolph: HOW HARD IS TO UNTIE A KNOT?, American Scientist, Issue 83, 1995, pp. 38-49.

(11) A. Stasiak, V. Katritch, J. Bednar, D. Michoud, J. Dubochet: ELECTROPHORETIC MOBILITY OF DNA KNOTS, Nature, Issue 384, 1996, pp. 122.

(12) S. A. Wasserman, N. R. Cozzarelli: BIOCHEMICAL TOPOLOGY: APPLICATIONS TO DNA RECOMBINATION AND REPLICATION, Science, Issue 232, 1986, pp. 951-960.

(13) Jorge A. Calvo (Ed.): PHYSICAL AND NUMERICAL MODELS IN KNOT THEORY: INCLUDING APPLICATIONS TO THE LIFE SCIENCES, World Scientific Publishing Company, Sept 2005.

(14) Andrzej Stasiak, Vsevolod Katritch, Louis H. Kauffman: IDEAT KNOTS (1st/Ed.), World Scientific Publishing Company, Mar 1999.

(15) S. K. Nechaev: STATISTICS OF KNOTS AND ENTANGLED RANDOM WALKS (1st/Ed.), World Scientific Publishing Company, Jan 1996.

(16) KNOT ATLAS (full catalogue wiki, 11 or less crossings), Dept. of Mathematics, University of Toronto, Canada, http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page

(17) Dan Silver: KNOT THEORY'S ODD ORIGINS, American Scientist, Issue 94, No. 2, pp. 158-165.

(18) Alexei Sossinsky: KNOTS, MATHEMATICS WITH A TWIST, Harvard University Press, 2002.

(19) Kenneth Perko: ON THE CLASSIFICATION OF KNOTS, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 45, No. 2, 1974, pp. 262-266.

(20) Joel Hass: ALGORITHMS FOR RECOGNIZING KNOTS AND 3-MANIFOLDS, In: Chaos, Solitons and Fractals, Elsevier, Issue 9, 1998, pp. 569-581.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΤΕ ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΚΕΡΔΙΣΤΕ!

ΠΕΡΙΟΔΟΣ Β' • ΤΕΥΧΟΣ 363 • ΙΟΥΝΙΟΣ 2012 • €7,00

ΠΕΡΙΣΚΟΠΙΟ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

30% ΕΚΠΤΩΣΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΔΡΟΜΕΣ + 2 ΒΙΒΛΙΑ-ΔΩΡΟ!

Η προέλευση των δεινοσαύρων

Ασύρματες Υπηρεσίες Υγείας
Μια πρωτοποριακή ιδέα

Θεωρία των κόμβων

SLS
Ο νέος πύραυλος-φορέας για την εξερεύνηση του διαστήματος

Πού κρύβεται η σκοτεινή ύλη του σύμπαντος;

Τα Λέηζερ του μέλλοντος

Καρκινικά βλαστικά κύτταρα
Το μυστικό της επιβίωσης των όγκων

9 771105 712006 06>