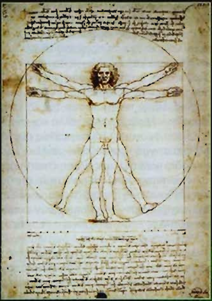
Συνήθως τα Μαθηματικά στην καθημερινή ζωή δίνουν την εντύπωση ότι είναι αυτονόητα, απλά και προφανή. Τις περισσότερες φορές, όμως, πίσω από τις τετριμμένες αριθμητικές πράξεις κρύβονται βαθύτερες και πολύπλοκες θεωρητικές έννοιες. Όποιος ασχολείται με αυτό τον πολύ ξεχωριστό κλάδο της επιστήμης, αργά ή γρήγορα θα βρεθεί μπροστά στη θεμελιώδη «Ερώτηση»: Είναι άραγε τα Μαθηματικά ανθρώπινο κατασκεύασμα, μια «επινόηση», που περιγράφει με σαφή θεωρητική «γλώσσα» την πραγματικότητα; Ή μήπως πρόκειται για μια ανθρώπινη αιελή προσπάθεια να «αποκαλυφθεί» η ίδια η δομή της πραγματικότητας και η ενδογενής μαθηματική της υπόσταση; Παρότι η μαθηματική σκέψη αποτελεί ίσως την πιο γνήσια έκφραση αντικειμενικού επιστημονικού συλλογισμού και λογικών συμπερασμάτων, η συγκεκριμένη ερώτηση φαίνεται κατά παράδοξο τρόπο ότι μπορεί να απαντηθεί αποκλειστικά και μόνο με υποκειμενικά κριτήρια.

Μαθηματικά

Εφεύρεση ή Ανακάλυψη;

ΧΑΡΗΣ Β. ΓΕΩΡΓΙΟΥ
Ερευνητής Πληροφορικής, M.Sc., Ph.D.



Φωτογραφία του περίφημου συγγράμματος «ο άνθρωπος του Βιτρούβιου» (Vitruvian Man, 1490) του Leonardo da Vinci, όπου περιγράφεται με λεπτομέρεια η σχέση του «Χρυσού Λόγου» Φ με τις ιδανικές αναλογίες του ανθρώπινου σώματος.

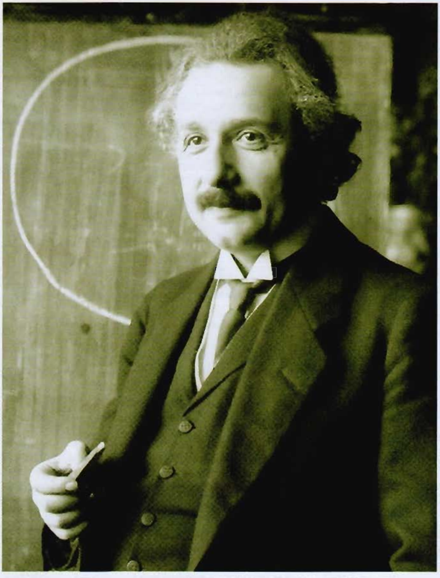
Τα Μαθηματικά αποτελούν μια από τις πιο «ιδιαίτερες» περιπτώσεις στην ιστορία των επιστημών και στον ανθρώπινο πολιτισμό γενικότερα. Ο εγκέφαλος του ανθρώπου δεν είναι κατασκευασμένος για να εκτελεί πολλές αριθμητικές πράξεις ταυτόχρονα και με μεγάλη ταχύτητα, αντίθετα είναι εξαιρετικά αποτελεσματικός στην επεξεργασία οπτικών ερεθισμάτων, στην ανάλυση του περιβάλλοντος και στην εμπειρική αξιολόγηση σχημάτων, χρωμάτων και καταστάσεων, όπως είναι και όλα σχεδόν τα ζώα-θηρευτές. Επιπλέον, όμως, έχει μια μοναδική ικανότητα που κανένα από τα ελάχιστα άλλα ζώα που τη διαθέτουν (δελφίνια, κοράκια, χιμπατζήδες), δεν την εμφανίζει σε τόσο εξελιγμένο βαθμό: την ικανότητα να σκέπτεται αφαιρετικά, να μορφοποιεί αφηρημένα μοντέλα, να εξάγει γενικά συμπεράσματα και να τα χρησιμοποιεί για να βρίσκει λύσεις σε κάθε πρόβλημα, εύκολα και αποτελεσματικά.

Αν η γλώσσα υπήρξε το βασικό εργαλείο ανάπτυξης της επικοινωνίας μεταξύ των πρώτων ανθρώπινων κοινωνιών, τα Μαθηματικά αποτέλεσαν τη «γλώσσα» διατύπωσης, ανάπτυξης και ανταλλαγής των διανοητικών αυτών φορμαλισμών. Όπως ακριβώς η γλώσσα έχει τον διττό χαρακτήρα του εργαλείου έκφρασης λόγου και ταυτόχρονα της περαιτέρω ανάπτυξής του, έτσι και τα Μαθηματικά είναι ταυτόχρονα μέσο διατύπωσης σκέψεων και συλλογισμών, αλλά επιπλέον μέσο ανακάλυψης νέων θεωριών και λογικών συμπερασμάτων που γίνονται αντιληπτά μόνο όταν γραφούν με τον κατάλληλο τρόπο.

Η «ομορφιά» των Μαθηματικών είναι άρρηκτα δεμένη με την απαράμιλλη περιγραφική τους δυνατότητα. Χρησιμοποιώντας απλές αλλά σαφείς διατυπώσεις, όχι σε φυσική γλώσσα αλλά με σύμβολα και πράξεις, η πιο σύνθετη έννοια και η πιο μεγάλη επιστημονική ανακάλυψη μπορεί να χωρέσει μέσα σε μια εξίσωση. Οι εξισώσεις των Maxwell, Faraday και Gauss για τον ηλεκτρομαγνητισμό αποτέλεσαν τη βάση για τις σημερινές τηλεπικοινωνίες, για τους ηλεκτρικούς κινητήρες, για τις γεννήτριες ρεύματος, προβλέποντας τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, πολλά χρόνια πριν ο Hertz ολοκληρώσει τα πειράματά του. Οι εξισώσεις του Αϊνστάιν για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, χρησιμοποιώντας πολύπλοκες θεωρητικές έννοιες όπως οι χωροχρονικοί «τανυστές» και η μη Ευκλείδεια γεωμετρία Reimann,ανέδειξαν χαρακτηριστικά του χωροχρόνου που ο ίδιος δεν είχε ποτέ την ευκαιρία να επιβεβαιώσει πειραματικά, όμως επαληθεύτηκαν αρκετές δεκαετίες αργότερα, όπως συνέβη π.χ. με τις «ανεξήγητες» ανωμαλίες στην τροχιά του πλανήτη Ερμή που ερμηνεύθηκαν πλήρως και τις ακτίνες φωτός από μακρινούς γαλαξίες που «καμπυλώνονται» καθώς περνούν μέσα από κάποιο πολύ ισχυρό βαρυτικό πεδίο. Πιο πρόσφατα, το 1974 οι θεωρητικοί Φυσικοί Stephen Hawking, Yakov Zeldovich και Alexei Starobinsky, αναλύοντας τις πολύπλοκες μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν την περίεργη φύση μιας μαύρης τρύπας στο διάστημα, πρόβλεψαν με απόλυτη βεβαιότητα την ύπαρξη μιας ειδικής μορφής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το κέντρο της, γεγονός που φαίνεται να επιβεβαιώθηκε με μετρήσεις ραδιοτηλεσκοπίων το 2010.

Τα Μαθηματικά μπορούν να αποδείξουν ότι ανάμεσα σε ένα πλήθος 23 ατόμων υπάρχει πιθανότητα τουλάχιστον 50% να βρεθούν δύο εξ' αυτών που να έχουν γενέθλια την ίδια ημερομηνία. Μάλιστα η συγκεκριμένη παρατήρηση ονομάζεται «παράδοξο των γενεθλίων» και αποτελεί τη βάση για μια από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους κρυπτανάλυσης (ανακάλυψης κλειδιών). Τα Μαθηματικά μπορούν επίσης να προβλέψουν ποια είναι η ιδανική αναλογία θηρευτών-θηραμάτων σε ένα οικοσύστημα σε ισορροπία, ποιο είναι το ιδανικό ποσοστό «τολμηρών» ανιχνευτών σε ένα κοπάδι από ψάρια, καθώς και ποια είναι η ιδανική απόσταση και ο ρυθμός αλιείας για τους ιθαγενείς των φυλών στον Ειρηνικό ωκεανό (Θεωρία Παιγνίων – Game Theory).

Φαίνεται παράδοξο, μια ανθρώπινη «γλώσσα» να είναι τόσο περιγραφική και ταυτόχρονα τόσο αποτελεσματική, όχι μόνο για τη διατύπωση πολύπλοκων σκέψεων



Ο Αϊνστάιν υπήρξε ένας από τους πολλούς επιστήμονες που έχουν υποστηρίξει τη «φορμαλιστική» υπόσταση των Μαθηματικών, δηλαδή την άποψη ότι αποτελούν καθαρά ανθρώπινη κατασκευή για την περιγραφή της πραγματικότητας.

και συλλογισμών αλλά και για την ανακάλυψη νέων. Ο ίδιος ο Αϊνστάιν είχε αναρωτηθεί πως είναι δυνατόν τα Μαθηματικά, «...ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα, να είναι τόσο αντικειμενικά και να ταιριάζουν τόσο καλά με την πραγματικότητα». Ο Eugene Wigner (1960) είχε ονομάσει αυτό το παράδοξο ως την «παράλογη αποτελεσματικότητα» («unreasonable effectiveness») των Μαθηματικών. Είναι λογικό, λοιπόν, κάποιος να αναρωτηθεί αν πρόκειται για κάτι τυχαίο, αν δηλαδή τα Μαθηματικά είναι ανθρώπινη «εφεύρεση» ή αν απλώς είναι η «ανακάλυψη» εννοιών που ήδη υπάρχουν ανεξαρτήτως διατύπωσης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΝΤΟΥ

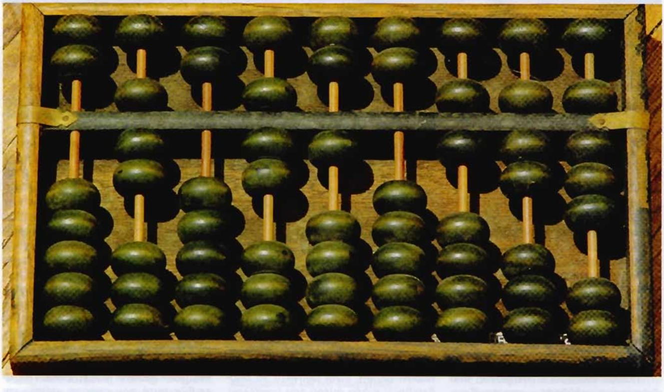
Ως εργαλείο διατύπωσης επιστημονικών θεωριών, τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται κυρίως με δύο μορφές, εξίσου αποτελεσματικές: την «ενεργή» και την «παθητική». Στην ενεργή μορφή, η διατύπωση αυτή έχει μια συγκεκριμένη αφετηρία και ένα συγκεκριμένο σκοπό, ένα στόχο, προς επιβεβαίωση ή απόρριψη, μέσα από μια σαφώς διατυπωμένη συλλογιστική πορεία. Αυτή είναι η συνηθέστερη μορφή εφαρμογής της μαθηματικής σκέψης και μεθοδολογίας για την απόδειξη κάποιας θεωρίας, για την επίλυση ενός προβλήματος, για τη βελτίωση της απόδοσης κάποιας διεργασίας, μερικές φορές ακόμα και για τη διατύπωση νέων θεωριών ως αποτέλεσμα προηγούμενων. Στην παθητική μορφή, τα Μαθηματικά παίζουν τον ρόλο της περιγραφής αφηρημένων εννοιών και αντικειμένων, θεωριών που δεν έχουν κάποιο άμεσο πρακτικό στόχο ή ίσως οποιαδήποτε σχέση με τον πραγματικό κόσμο. Αυτή η μορφή είναι που συχνά οδηγεί σε θεωρίες και πεδία μελέτης τα οποία περιγράφουν την ίδια τη φύση των Μαθηματικών, αλλά και του ίδιου του φυσικού κόσμου, καθώς συχνά κάποια στιγμή «ταιριάζουν» απόλυτα με το πεδίο μελέτης μιας άλλης επιστήμης.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της ενδογενούς διασύνδεσης μερικών αμιγώς θεωρητικών μαθηματικών εννοιών με άλλες επιστήμες είναι η θεωρία ομάδων (group theory) που διατύπωσε ο ταλαντούχος Γάλλος μαθηματικός Evariste Galois κατά τη δεκαετία του 1830. Η θεωρία ομάδων περιγράφει τη δομή και τις ιδιότητες αλγεβρικών «δομών», συνόλων από αφηρημένα αντικείμενα, εφοδιασμένων με πράξεις μεταξύ των στοιχείων που περιλαμβάνουν. Ετσι ορίζονται για παράδειγμα οι βασικές αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση και οι παραγόμενες από αυτήν αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) στο σύνολο των φυσικών αριθμών (θετικοί ακέραιοι). Αν και φαίνεται εξαιρετικά απλή ως έννοια, εν τούτοις εμπεριέχει εξαιρετική περιγραφική δυνατότητα, σε θεωρητικό αλλά και σε πρακτικό επίπεδο. Τη δεκαετία του 1960, οι Murray Gell-Mann και Yuval Ne'eman απέδειξαν ότι μια τέτοια αλγεβρική δομή, συγκεκριμένα η ομάδα τύπου SU(3), απεικονίζει με πολύ μεγάλη ακρίβεια τη συμπεριφορά και τις αλληλεπιδράσεις υποατομικών σωματιδίων (αδρονίων) σύμφωνα με τη λεγόμενη θεωρία της «κβαντικής χρωμοδυναμικής» (QCD). Η αναπάντεχη αυτή σύνδεση μεταξύ δύο εντελώς ανεξάρτητων θεωρητικών πεδίων, αποτέλεσε τη βάση για τη σύγχρονη πυρηνική θεωρία, δηλαδή για τη δομή των πυρήνων στα άτομα των χημικών ενώσεων.

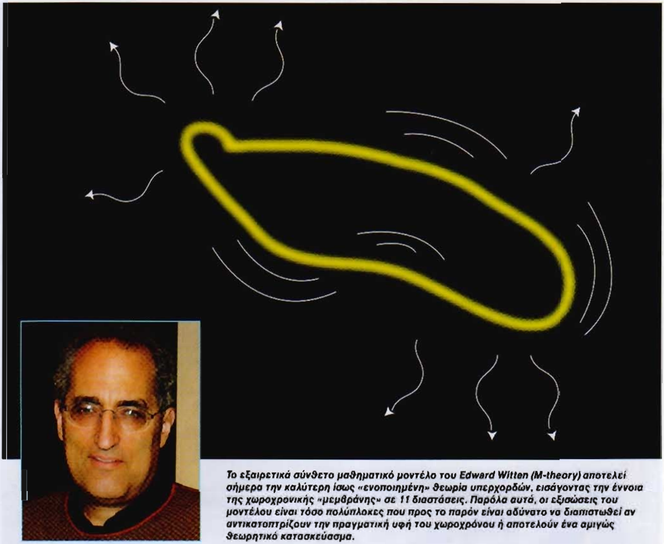
Ενα εξίσου χαρακτηριστικό παράδειγμα παρόμοιας διεπιστημονικής σύνδεσης των Μαθηματικών με τη Θεωρητική Φυσική είναι η θεωρία κόμβων (knot theory) και η πιθανή εφαρμογή της στις σύγχρονες προσπάθειες περιγραφής της φύσης του χωροχρόνου μέσω της θεωρίας των υπερχορδών (superstring theory) και των βρόχων κβαντικής βαρύτητας (loop quantum gravity). Πρόσφατα, στα μέσα της δεκαετίας του 90, ο μαθηματικός Edward Witten ανέπτυξε μια εξαιρετικά πολύπλοκη θεωρία, ακόμα και για τους συναδέλφους του, η οποία ενοποιεί τις πέντε διαφορετικές «παραλλαγές» της θεωρίας υπερχορδών σε μία και μοναδική (M-theory), εισάγοντας την έννοια των χωροχρονικών «μεμβρανών» σε 11 διαστάσεις, προβλέποντας μάλιστα ότι απαιτούνται το πολύ 16 διαστάσεις για ένα παρόμοιο «πλήρες» μοντέλο. Αντίστοιχα, η θεωρία αριθμών (number theory) αποτελεί το βασικό υπόβαθρο για πολλούς αλγορίθμους κρυπτογράφησης και κατασκευής κρυπτογραφικών κλειδιών όσον αφορά την ασφάλεια πληροφοριακών συστημάτων και τηλεπικοινωνιών, παρόλο που ο Hardy, ένας από τους πρωτεργάτες στο πεδίο αυτό, είχε δηλώσει πως δεν προέβλεπε οποιαδήποτε «πολεμική» εφαρμογή της θεωρίας αριθμών. Το 1854 ο Bernhard Riemann διατύπωσε τη δική του θεωρία περί μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, ιδεατών χώρων όπου παράλληλες ευθείες είναι δυνατό να τέμνονται ή να αποκλίνουν μεταξύ τους. Πολλές δεκαετίες αργότερα, ο Αϊνστάιν χρησιμοποίησε ακριβώς αυτά τα θεωρητικά μοντέλα για να διαμορφώσει το μαθηματικό υπόβαθρο της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

Ο άνθρωπος άλλοτε «επινοεί» Μαθηματικά πέρα και πάνω από την άμεση εμπειρική του γνώση και άλλοτε προσπαθεί να «ανακαλύψει» τα κατάλληλα Μαθηματικά που ενυπάρχουν στη Φύση και που περιγράφουν σωστά ένα πραγματικό πρόβλημα, το οποίο φαίνεται εξαιρετικά δύσκολο να κατανοηθεί.

Όλα τα παραπάνω αναδεικνύουν την «παράδοξα αποτελεσματική» φύση των Μαθηματικών, την ικανότητά τους δηλαδή να απεικονίζουν με σαφή και αντικειμενικό τρόπο φυσικές διαδικασίες και έννοιες που είναι «κοσμικές», θεμελιώδεις και ενδογενείς ως προς τον τρόπο που λειτουργεί η ίδια η Φύση. Παρ' όλα αυτά, τα Μαθηματικά χαρακτηρίζονται από δύο ιδιότητες λίγο-πολύ αντίθετες: από τη μια πλευρά είναι σε μεγάλο βαθμό αυθύπαρκτα, περιγράφοντας έννοιες που ίσως είναι αμιγώς θεωρητικές και ως ένα βαθμό προϊόντα της ανθρώπινης διανόησης, και από την άλλη είναι «αρκούντως αποτελεσματικά», αλλά συχνά όχι τέλεια, όπως διαπιστώνεται σχετικά με το επίπεδο ακρίβειας που περιγράφουν την πραγματικότητα. Ο άνθρωπος άλλοτε «επινοεί» Μαθηματικά πέρα και πάνω από την άμεση εμπειρική του γνώση και άλλοτε προσπαθεί να «ανακαλύψει» τα κατάλληλα Μαθηματικά που ενυπάρχουν στη Φύση και που περιγράφουν σωστά ένα πραγματικό πρόβλημα, το οποίο φαίνεται εξαιρετικά δύσκολο να κατανοηθεί. Οι δύο αυτές αντίθετες όψεις σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών αποτελούν αντίστοιχα τις δύο «σχολές» σκέψης, τον «φορμαλισμό» (formalism) και τον «πλατωνισμό» (Platonism).



Φωτογραφία αρχαίου κινέζικου άβακα, της πρώτης υπολογιστικής «μηχανής» στον ανθρώπινο πολιτισμό. Αν και το όνομα έχει ελληνικές ρίζες, εμφανίστηκε για πρώτη φορά στη Μεσοποταμία την περίοδο των Σουμερίων το 2.700 π.Χ.



Το εξαιρετικά σύνθετο μαθηματικό μοντέλο του Edward Witten (M-theory) αποτελεί σήμερα την καλύτερη ίσως «ενοποιημένη» θεωρία υπερχορδών, εισάγοντας την έννοια της χωροχρονικής «μεμβράνης» σε 11 διαστάσεις. Παρόλα αυτά, οι εξισώσεις του μοντέλου είναι τόσο πολύπλοκες που προς το παρόν είναι αδύνατο να διαπιστωθεί αν αντικατοπτρίζουν την πραγματική υφή του χωροχρόνου ή αποτελούν ένα αμιγώς θεωρητικό κατασκεύασμα.

ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΛΑΤΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Είναι πλέον φανερό ότι υπάρχει κάτι «περίεργο» στα Μαθηματικά, κάτι που τα χαρακτηρίζει με ιδιαίτερο τρόπο ανάμεσα στις υπόλοιπες επιστήμες. Είναι αυτόνομα, συχνά εντελώς θεωρητικά, αλλά ταυτόχρονα εμπεριέχονται στη δομή και στη φύση της πραγματικότητας που μας περιβάλλει. Είναι επομένως ανθρώπινη εφεύρεση ή απλά ανακάλυψη αυτού που ήδη υπάρχει; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι εξαιρετικά δύσκολη και αρκετά υποκειμενική. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο δεν είναι και μοναδική.

Πολλοί διάσημοι επιστήμονες, από διάφορους κλάδους, υποστηρίζουν πως δεν είναι δυνατό αυτή η «παράλογα αποτελεσματική» φύση των Μαθηματικών να αποτελεί σύμπτωση. Η «πλατωνική» αντίληψη για αυτό το χαρακτηριστικό τους είναι ακριβώς ότι πρόκειται για ενδογενές φαινόμενο, δηλαδή για αποκάλυψη ιδιοτήτων και εννοιών που ενυπάρχουν ήδη στον κόσμο που μας περιβάλλει και που τα Μαθηματικά, με τη σαφήνεια και την περιγραφικότητα που εμπεριέχουν, καθιστούν δυνατή τη διατύπωσή τους. Εκτός από τον Hardy, ένας ακόμα διάσημος μαθηματικός, ο Godel, το 1931 διατύπωσε και απέδειξε σε καθαρά θεωρητικό επίπεδο (θεωρήματα μη πληρότητας – incompleteness theorems) ότι ουσιαστικά οποιοδήποτε μαθηματικό κατασκεύασμα μπορεί εν δυνάμει να εμπεριέχει έννοιες και θεωρήματα που, παρότι αληθή, είναι αδύνατο να αποδειχθούν εντός αυτού του μοντέλου. Με άλλα λόγια, υπάρχουν έννοιες που τα Μαθηματικά αδυνατούν να περιγράψουν επαρκώς ή τουλάχιστον με την ίδια ενδογενή συνέπεια που τα χαρακτηρίζει. Μάλιστα κατά την προετοιμασία του για την υποβολή της αίτησής του σχετικά με την απόκτηση αμερικανικής υπηκοότητας το 1947, και παρά τις αντίθετες συστάσεις των Αϊνστάιν και Morgenstern που παρίσταντο ως μάρτυρες στη διαδικασία, ο Godel διατύπωσε την άποψή του πως το Σύνταγμα των ΗΠΑ περιελάμβανε αντίστοιχες «ατέλειες», καθώς εν δυνάμει επέτρεπε (υπό κάποιες συνθήκες) τη νόμιμη άνοδο στην εξουσία μιας φασιστικής κυβέρνησης. Ο επίσης διάσημος μαθηματικός και θεωρητικός φυσικός Roger Penrose σε πολλά σημεία στα έργα του αναφέρεται στην «υφή της πραγματικότητας» (fabric of reality), εννοώντας ακριβώς αυτό που υπάρχει «πίσω» και πέρα από αυτά που είναι δυνατό να μελετηθούν από τις φυσικές επιστήμες ή να περιγραφούν με ακρίβεια σε μαθηματικό επίπεδο. Μάλιστα έχει διατυπώσει τη θεωρία πως μεταξύ των νευροδιαβιβαστών στους νευρώνες του εγκεφάλου πραγματοποιούνται κβαντικά φαινόμενα αλληλεπίδρασης, τα οποία επηρεάζουν με τυχαίο τρόπο τις πληροφορίες και ουσιαστικά αλλοιώνουν την αντίληψή μας για τον κόσμο που μας περιβάλλει.

Από την άλλη πλευρά, κάποιοι επιστήμονες διατυπώνουν την άποψη πως τα Μαθηματικά δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια ακόμη ανθρώπινη εφεύρεση, όπως ακριβώς είναι και η γλώσσα (προφορικός και γραπτός λόγος, σε κάθε μορφή). Μεταξύ άλλων, οι Hilbert, Cantor και Αϊνστάιν, καθώς και πολλοί άλλοι, έχουν υποστηρίξει αυτή τη «φορμαλιστική» υπόσταση των Μαθηματικών. Στο ερώτημα γιατί τα Μαθηματικά λειτουργούν τόσο αναπάντεχα αποτελεσματικά, η απάντηση φαίνεται να είναι ιδιαίτερα ρεαλιστική: ο άνθρωπος δημιουργεί και επεξεργάζεται τα Μαθηματικά που κατανοεί καλύτερα, αυτά ακριβώς που απεικονίζουν έννοιες και προβλήματα τα οποία από τη φύση του μπορεί να αναλύσει. Σε αυτά περιλαμβάνεται η αντιληπτική ικανότητα σε διακριτά αντικείμενα (αριθμοί), σε διαφορετικά σχήματα και χρώματα (γεωμετρία), στην εκτίμηση μεγεθών, ποσοτήτων και αποστάσεων (στερεοσκοπική όραση). Κατά συνέπεια, προβλήματα που συνδέονται με αυτές τις έννοιες, όπως και η διατύπωση των αντίστοιχων εννοιών και πράξεων με σαφή και «μαθηματικό» τρόπο, αποτελούν το πεδίο όπου η αφηρημένη σκέψη και η συλλογιστική που εμπεριέχουν τα Μαθηματικά φαίνεται να λειτουργεί εξαιρετικά αποτελεσματικά. Με άλλα λόγια, οι άνθρωποι «επιλέγουν» να διατυπώνουν και να εφαρμόζουν Μαθηματικά που κατανοούν καλύτερα και που έχουν κάποια σχέση, μεγάλη ή μικρή, με φυσικές έννοιες, καταστάσεις και προβλήματα. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν αμέτρητα άλλα προβλήματα και έννοιες που ο μέσος άνθρωπος αδυνατεί να κατανοήσει

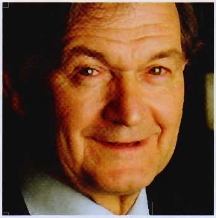
Ο διάσημος Γερμανός μαθηματικός Leopold Kronecker, συνοψίζοντας την άποψη σχετικά με τη μη αντικειμενικότητα-πληρότητα των Μαθηματικών ακόμα και για απλές έννοιες όπως οι αριθμοί, είπε πως «...Ο Θεός δημιούργησε τους φυσικούς αριθμούς, οτιδήποτε άλλο (στα Μαθηματικά) είναι ανθρώπινο κατασκεύασμα».

Γραφική αναπαράσταση της αλγεβρικής δομής Calabi-Yau, ενός γεωμετρικού τόπου έξι διαστάσεων (Calabi-Yau manifold) που εμφανίζεται σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών και της θεωρητικής Φυσικής, όπως για παράδειγμα ως αποτέλεσμα των εξισώσεων στη θεωρία υπερχορδών (superstring theory).

πλήρως, ενώ ταυτόχρονα οι αντίστοιχες μαθηματικές τους περιγραφές είναι κάθε άλλο παρά πλήρεις. Ο άνθρωπος δεν μπορεί να κατασκευάσει τα κατάλληλα Μαθηματικά για αυτές τις περιπτώσεις και αντίστοιχα τα Μαθηματικά αδυνατούν να τον βοηθήσουν να κατανοήσει καλύτερα τις περιπτώσεις αυτές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι στοχαστικές (τυχαίες) διαδικασίες, όπου τα βασικά μαθηματικά εργαλεία είναι η γενική περιγραφή τους μέσω της στατιστικής και των πιθανοτήτων, όπως επίσης και τα χαοτικά δυναμικά συστήματα (π.χ. πρόβλεψη καιρού ή χρηματιστηριακών δεικτών), όπου τα ενδογενή χαρακτηριστικά των αντίστοιχων μαθηματικών μοντέλων είναι τόσο πολύπλοκα που ουσιαστικά τα καθιστούν μη προβλέψιμα.

Ο διάσημος Γερμανός μαθηματικός Leopold Kronecker, συνοψίζοντας την παραπάνω άποψη σχετικά με τη μη αντικειμενικότητα-πληρότητα των Μαθηματικών ακόμα και για απλές έννοιες όπως οι αριθμοί, είπε πως «...Ο Θεός δημιούργησε τους φυσικούς αριθμούς, οτιδήποτε άλλο (στα Μαθηματικά) είναι ανθρώπινο κατασκεύασμα». Και για να δείξει πόσο μεγάλη είναι η σχέση των Μαθηματικών με την ανθρώπινη αντίληψη διατύπωσε ένα εξαιρετικά εύστοχο νοητικό πείραμα-παράδειγμα: Μια μοναδική μέδουσα, η οποία ζει εντελώς απομονωμένη στα σκοτεινά βάθη ενός απέραντου ωκεανού. Σε αυτή την περίπτωση, η αντίληψη της μέδουσας δεν θα περιελάμβανε καθόλου την έννοια του σχήματος (ασαφή όρια και σχήμα σώματος), την έννοια του χρώματος (απουσία φωτός) ή την έννοια της μέτρησης πέρα από τη μονάδα. Επομένως, τα «Μαθηματικά» μιας τέτοιας μέδουσας θα περιορίζονταν στο «1», ίσως και στο «0» ή στο «άπειρο», αν και αυτά αποτελούν ιδιαίτερα δύσκολες μαθηματικές έννοιες (κενό σύνολο και απειροσύνολο).

Μια ακόμα χαρακτηριστική περίπτωση ριζικά διαφορετικής μαθηματικής αντίληψης, κάθε άλλο παρά νοητική όπως το παράδειγμα της μοναχικής μέδουσας, είναι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές. Αν και ανθρώπινο κατασκεύ-



Ενας από τους υποστηρικτές της «πλατωνικής» υπόστασης των Μαθηματικών, ο Roger Penrose, στα έργα του αναφέρεται συχνά στην «υφή της πραγματικότητας» (fabric of reality), αναδεικνύοντας αυτό που υπάρχει πέρα από όσα είναι δυνατό να μελετηθούν από τις φυσικές επιστήμες ή να περιγραφούν με ακρίβεια σε μαθηματικό επίπεδο.

Πολλές φορές τα Μαθηματικά φαίνονται εξαιρετικά πολύπλοκα, δυσνόητα στον μέσο άνθρωπο, μια γλώσσα που λίγο-πολύ κατανοούν και χρησιμοποιούν μόνο οι επιστήμονες.

ασμα, οι υπολογιστές αποτελούν ίσως το πιο σύνθετο «εργαλείο» στην ιστορία της ανθρωπότητας, τόσο σε πρακτικό επίπεδο (προσαρμοστικότητα στον σκοπό-τρόπο λειτουργίας), όσο και σε θεωρητικό επίπεδο (θεωρία υπολογισμού). Πέρα από τη δυσκολία του ανθρώπου να «διδάξει» τη μηχανή πώς να εκτελεί συγκεκριμένες διαδικασίες, δηλαδή να μετατρέπει μια αλγοριθμική διαδικασία σε εντολές προγράμματος, το ουσιώδες πρόβλημα δεν είναι άλλο από τα διαφορετικά Μαθηματικά που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος και ο ηλεκτρονικός υπολογιστής. Συγκεκριμένα, ο άνθρωπος ζει και αλληλεπιδρά σε ένα αναλογικό («συνεχή») κόσμο, δηλαδή με μεγέθη και ποσότητες που δεν είναι απαραίτητα ακέραιες. Αντίθετα, η σημερινή ψηφιακή τεχνολογία στην οποία βασίζονται οι μικροεπεξεργαστές καθιστούν υποχρεωτική τη χρήση διακριτών αριθμητικών τιμών και μάλιστα όχι στο δεκαδικό σύστημα αλλά στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Ισως να μοιάζει με μικρή λεπτομέρεια, όμως η διαφορά αυτή είναι θεμελιώδους σημασίας όσον αφορά τον τρόπο που ένας υπολογιστής «κατανοεί» έναν αλγόριθμο τον οποίο έχει σχεδιάσει κάποιος άνθρωπος, ο οποίος αντίστοιχα κατανοεί το ίδιο πρόβλημα αλλά με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Σε όρους Φυσικής, ο άνθρωπος ζει σε έναν κόσμο που σε μικροσκοπικό επίπεδο λειτουργεί κβαντομηχανικά, αλλά σε μακροσκοπικό επίπεδο τον αντιλαμβάνεται ως συνεχή. Αντίστοιχα, ο ανθρώπινος αλγόριθμος σχεδιάζεται ώστε να λειτουργεί σωστά σε αναλογικό κόσμο, όμως η υλοποίηση του αντίστοιχου προγράμματος εκτελείται στον διακριτό κόσμο του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Το γεγονός αυτό καθιστά θεωρητικά αδύνατη την απόλυτη επιβεβαίωση της ορθότητας κάποιου προγράμματος, ειδικά σε επίπεδο προδιαγραφών-αποτελέσματος, καθώς η πολυπλοκότητα του ίδιου του συστήματος συνολικά καθιστά το έργο αυτό εξαιρετικά δύσκολο για την ανθρώπινη αντίληψη. Ο Ιωσήφ Σηφάκης, Ελληνας ειδικός της Επιστήμης Υπολογιστών που το 2007 τιμήθηκε με το βραβείο Turing (ACM Turing Award, πρακτικά ισοδύναμο των βραβείων Νόμπελ, για την Πληροφορική) χάρη στη συνεισφορά του στο πεδίο του ελέγχου μοντέλων (model checking), αναφέρει ακριβώς αυτή την «ιδιαιτερότητα» των διαφορετικών Μαθηματικών μεταξύ ανθρώπων και υπολογιστών ως έναν από τους πιο καθοριστικούς παράγοντες που πρέπει να αντιμετωπιστεί μέσα στις επόμενες δεκαετίες, κατά προτίμηση φέρνοντας τους υπολογιστές πλησιέστερα στην πιο σύνθετη ανθρώπινη αντίληψη (analog IC, fuzzy logic, κλπ.).

Πολλές φορές τα Μαθηματικά φαίνονται εξαιρετικά πολύπλοκα, δυσνόητα στον μέσο άνθρωπο, μια γλώσσα που λίγο-πολύ κατανοούν και χρησιμοποιούν μόνο οι επιστήμονες. Αλλες φορές, όμως, απλά «είναι εκεί», λειτουργούν από μόνα τους, και κάποια στιγμή αποκαλύπτονται με τον πιο ξεκάθαρο τρόπο, πίσω από πράγματα και διαδικασίες της καθημερινότητας, μέσα από μια απλή ιδέα ενός και μόνο ανθρώπου. Εκτός από τα ιδεατά παραδείγματα και τα νοητικά πειράματα, υπάρχουν περιπτώσεις που κάποιες από τις πιο σημαντικές πτυχές των Μαθηματικών ξεπηδούν με τον πιο αναπάντεχο τρόπο.

«ΚΟΣΜΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ» ΚΑΙ ΟΙ «ΑΤΕΛΕΙΕΣ» ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρότι τα Μαθηματικά θεωρούνται από πολλούς επιστήμονες ως η «τέλεια γλώσσα» περιγραφής της πραγματικότητας, εν τούτοις όλοι ουσιαστικά παραδέχονται πως σε αρκετές περιπτώσεις η περιγραφή αυτή είναι κάθε άλλο παρά τέλεια. Στις φυσικές επιστήμες και κυρίως στη Φυσική, τα Μαθηματικά περιλαμβάνουν μια πληθώρα «σταθερών», δηλαδή ποσοτήτων που φαίνονται να κυριαρχούν ως βασικές ενδογενείς παράμετροι του Σύμπαντος και που καθορίζουν τον τρόπο λειτουργίας βασικών φυσικών διεργασιών. Η αδυναμία των Μαθηματικών έγκειται ακριβώς στο ότι ο τρόπος «περιγραφής» (ακρίβεια, αιτιολόγηση) των συγκεκριμένων «κοσμικών παραμέτρων» είναι ουσιαστικά ανεπαρκής. Οι σταθερές αυτές υπολογίζονται θεωρητικά, επιβεβαιώνονται πειραματικά, παρόλα αυτά ούτε η ύπαρξη ούτε το μέγεθός τους δεν αιτιολογούνται πλήρως, ενώ επιπλέον δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με απόλυτη ακρίβεια.

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες ερωτήσεις στην Επιστήμη των Υπολογιστών που αφορά τον τρόπο λειτουργίας τους είναι το κατά πόσον το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούν είναι «βέλτιστο», κυρίως ως προς την οικονομία αναπαράστασης των αριθμών (απαιτούμενη μνήμη, πολυπλοκότητα αριθμητικών κυκλωμάτων). Γιατί άραγε οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές λειτουργούν με βάση το δυαδικό σύστημα και όχι το δεκαδικό, όπως οι άνθρωποι; Οι σημερινοί ηλεκτρονικοί υπολογιστές βασίζονται στην τεχνολογία των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (Integrated Circuits - IC) που από την κατασκευή τους λειτουργούν με αριθμητική αναπαράσταση αρκετά διαφορετική από αυτή που χρησιμοποιούν οι άνθρωποι, αλλά μαθηματικά ισοδύναμη από κάθε άποψη. Ενώ οι νεαροί μαθητές στα σχολεία μαθαίνουν να μετρούν και να εκτελούν αριθμητικές πράξεις σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, κλπ., οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές με κυκλώματα ημιαγωγών, δηλαδή δύο καταστάσεων, εκτελούν εσωτερικά τις αντίστοιχες πράξεις σε μονάδες, δυάδες, τετράδες, οκτάδες, δεκαεξάδες, κλπ..

Ουσιαστικά, η αρχή της ομαδοποίησης ποσοτήτων ως άθροισμα δυνάμεων αποτελεί τη βασική ιδέα κατασκευής του άβακα, της πρώτης υπολογιστικής «μηχανής» του ανθρώπου: κάθε στήλη περιλαμβάνει τόσα στοιχεία, όσα ακριβώς απαιτεί το συγκεκριμένο σύστημα αρίθμησης, δηλαδή εννέα (χωρίς το μηδέν) για το δεκαδικό. Οταν σε κάποια πρόσθεση υπάρχει υπερχείλιση και δημιουργείται κρατούμενο, τότε αυτό μεταφέρεται στην αμέσως επόμενη στήλη, δηλαδή στην αμέσως μεγαλύτερη δύναμη του 10. Συνεπώς, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορεί να κατασκευαστεί άβακας με βάση το δυαδικό σύστημα, έχοντας στήλες με ένα μόνο στοιχείο σε κάθε μια, συμβολίζοντας μόνο το «0» και το «1».

Ποια είναι όμως η σχέση όλων των παραπάνω με τη «βέλτιστη» σχεδίαση ηλεκτρονικών υπολογιστών; Είναι ακριβώς το ζήτημα της κατάλληλης αριθμητικής αναπαράστασης, της πιο αποδοτικής σε θεωρητικό επίπεδο και ταυτόχρονα της πιο φθηνής και εύκολης όσον αφορά την υλοποίηση σε καθαρά τεχνολογικό επίπεδο. Η επιλογή αυτή καθορίζει σχεδόν απόλυτα το είδος και την αποδοτικότητα της τεχνολογίας, ως προς το κόστος και την ταχύτητα, ακόμα και το εφικτό, της κατασκευής των αντίστοιχων υπολογιστικών κυκλωμάτων. Η διαισθητική απάντηση, αυτή που αποτελεί κοινό τόπο στον απλό χρήστη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, είναι ότι εφόσον τα κυκλώματα λειτουργούν με ηλεκτρικό ρεύμα, δηλαδή σε κατάσταση «διέλευσης» ή «διακοπής», είναι απόλυτα λογικό η δυαδική αυτή κατάσταση να συνδυαστεί αντίστοιχα με το αριθμητικό σύστημα που την υλοποιεί απλούστερα: συμβολίζοντας με «1» την κατάσταση «διέλευση» και με «0» την κατάσταση «διακοπή» σε ένα κύκλωμα. Στην ουσία, κάθε αγωγός, κάθε πυκνωτής, κάθε ηλεκτρονικός διακόπτης, αντιστοιχεί σε ένα δυαδικό ψηφίο. Δεν απαιτούνται επιπλέον αριθμητικά σύμβολα, συνεπώς ούτε περισσότερες καταστάσεις στα αντίστοιχα ηλεκτρονικά κυκλώματα.

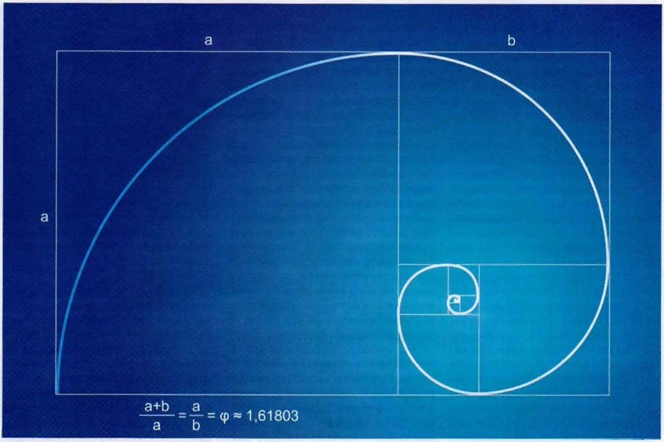
Η παραπάνω λογική είναι απόλυτα σωστή σε τεχνολογικό επίπεδο. Ομως, τι θα συνέβαινε αν όντως ήταν δυνατό να κατασκευαστούν κυκλώματα τριών, τεσσάρων ή περισσότερων καταστάσεων; Πράγματι, παρόμοια τεχνολογία είναι εδώ και κάποια χρόνια διαθέσιμη, μέσω κυκλωμάτων ανάλογων του τρανζίστορ αλλά που λειτουργούν σε κβαντικό ή βιοχημικό επίπεδο και που προσφέρουν τη δυνατότητα πολλαπλών καταστάσεων. Θα είχε άραγε νόημα να κατασκευαστούν ηλεκτρονικοί υπολογιστές που θα λειτουργούσαν με το αντίστοιχο αριθμητικό σύστημα αντί του δυαδικού, ίσως μάλιστα με το δεκαδικό, εξαφανίζοντας ουσιαστικά αυτό το πρόβλημα διαφορετικής «κατανόησης» των αριθμών από τον υπολογιστή και από τον άνθρωπο; Με άλλα λόγια, μπορούν τα Μαθηματικά να δώσουν μια πλήρως αιτιολογημένη απάντηση σε ό,τι αφορά το θεωρητικά βέλτιστο αριθμητικό σύστημα; Και, επιπλέον, θα μπορούσε ένα τέτοιο «βέλτιστο» αριθμητικό σύστημα να χρησιμοποιηθεί στην πράξη, ή αντίθετα τα σημερινά Μαθηματικά καθιστούν κάτι τέτοιο ανέφικτο; Σε αυτά ακριβώς τα ερωτήματα τα Μαθηματικά, όχι μόνο κωδικοποιούν με σαφή τρόπο το πρόβλημα, αλλά επιπλέον αναδεικνύουν και κάποιες βαθύτερες πτυχές του που με πρώτη ματιά δεν γίνονται αντιληπτές. Το πραγματικό ερώτημα είναι ποια αριθμητική βάση αποτελεί θεωρητικά την κατάλληλη επιλογή, ώστε να εξισορροπούνται με βέλτιστο τρόπο οι εξής δύο παράγοντες: Από τη μια πλευρά, μια μεγάλη βάση «συμπυκνώνει» καλύτερα την αναπαράσταση απαιτώντας ταυτόχρονα περισσότερα σύμβολα, ενώ από την άλλη, μια μικρή βάση μεγαλώνει την αναπαράσταση απαιτώντας όμως λιγότερα σύμβολα.

Η ακριβής μεθοδολογία εύρεσης της βέλτιστης λύσης στο παραπάνω πρόβλημα περιλαμβάνει μια σειρά τεχνικών και πράξεων, όχι ιδιαίτερα σύνθετων αλλά ειδικά στοχευμένων στον τελικό σκοπό της αναζήτησης. Η τελική «βέλτιστη» λύση που προκύπτει για τη βάση B είναι:

$B = e \approx 2{,}71828\ldots$

Ο αριθμός e είναι η βάση των φυσικών (Νεπέριων) λογαρίθμων και αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές «κοσμικές σταθερές» των Μαθηματικών, η οποία εμφανίζεται σε φυσικά φαινόμενα, στην κβαντομηχανική, στη θερμοδυναμική, στη θεωρία πιθανοτήτων, στις μετρήσεις ενέργειας στοιχειωδών σωματιδίων, στον χρόνο ημίσειας ζωής ραδιενεργών στοιχείων, παντού γύρω μας, με τρόπο και ρυθμό εμφάνισης που ουσιαστικά υποδηλώνει πως είναι «ενσωματωμένη» ως παράμετρος σε ολόκληρο το Σύμπαν. Στην περίπτωση της παραπάνω ανάλυσης, το αποτέλεσμα αυτό υποδει-

Παράδειγμα χαοτικής μορφοκλασματικής δομής (fractal) στη φύση, αποτελεί η μορφή και ο τρόπος ανάπτυξης των κυτταρικών δομών στο κουνουπίδι. Καθώς η προσοχή εστιάζεται σε όλο και μικρότερη κλίμακα, η βασική δομή ανάπτυξης και τα σχήματα των διακλαδώσεων παραμένουν ίδια.



Γραφική αναπαράσταση της ακολουθίας Fibonacci. Κάθε αριθμός απεικονίζεται ως μήκος πλευράς σε ένα τετράγωνο, το οποίο εφάπτεται στο αμέσως προηγούμενο και στο αμέσως επόμενο κατά σειρά. Οι δύο απέναντι γωνίες της διαγωνίου ενώνονται με μια κυκλική τροχιά τεταρτημορίου, δηλαδή με κέντρο τη μία γωνία του τετραγώνου. Η συνολική σπειροειδής τροχιά που προκύπτει είναι σχεδόν ταυτόσημη με τη μορφή που εμφανίζεται κατά την ανάπτυξη του κελύφους σε πάρα πολλά κεφαλόποδα της θάλασσας (π.χ. ναυτίλος).

κνύει ουσιαστικά πως η βέλτιστη επιλογή για τη βάση ενός «κοσμικού» αριθμητικού συστήματος θα ήταν ακριβώς ο αριθμός e.

Με άλλα λόγια, μια αμιγώς θεωρητική προσέγγιση του προβλήματος της εύρεσης της βέλτιστης αριθμητικής αναπαράστασης (ως προς την οικονομία μήκους και συμβόλων) οδηγεί στην ίδια ακριβώς «κοσμική σταθερά» που διέπει ένα πλήθος άλλων φυσικών φαινομένων και διαδικασιών. Η συμπαντική παράμετρος που περιγράφει τον χρόνο ημίσειας ζωής ενός ραδιενεργού στοιχείου στη Φύση, είναι ακριβώς ο αριθμός που προκύπτει ως η πιο αποτελεσματική βάση αναπαράστασης των αριθμών. Με παρόμοιο τρόπο, ο αριθμός π που χαρακτηρίζει τις ιδιότητες του κύκλου ή της σφαίρας, όπως για παράδειγμα το εμβαδό και την περίμετρο της Γης, εμφανίζεται επίσης ως η κύρια παράμετρος στην κατανομή πιθανοτήτων σε στοχαστικές διαδικασίες, όπως για παράδειγμα το ποσοστό του «θορύβου» σε μια αναλογική ή ψηφιακή φωτογραφία. Αναμφισβήτητα, όλες αυτές οι «συμπτώσεις» δείχνουν πως πρόκειται για κάτι που κάθε άλλο παρά τυχαίο μπορεί να θεωρηθεί.

Παρ' όλα αυτά, οι «κοσμικές» αυτές σταθερές κατά κανόνα εμπεριέχουν και την εγγενή αδυναμία των Μαθηματικών να τις περιγράψουν με απόλυτη ακρίβεια. Για παράδειγμα, ο αριθμός e δεν είναι απλά δεκαδικός αλλά επιπλέον άρρητος, δηλαδή περιλαμβάνει άπειρα δεκαδικά ψηφία και μάλιστα χωρίς περιοδικότητα. Με άλλα λόγια, δεν μπορεί να γραφεί με κανέναν τρόπο με απόλυτη ακρίβεια. Το γεγονός αυτό από μόνο του καθιστά τη χρήση του ως αριθμητική βάση ουσιαστικά ανέφικτη, αναδεικνύει όμως ταυτόχρονα τις εγγενείς «ατέλειες» των Μαθηματικών και των αριθμών όπως εμείς τα αντιλαμβανόμαστε: Πώς είναι δυνατό μια τέτοια «κοσμική σταθερά» του Σύμπαντος να μη μπορεί να «μετρηθεί» με απόλυτη ακρίβεια σε κανένα αριθμητικό μας σύστημα;

Ενα εξίσου χαρακτηριστικό παράδειγμα της ύπαρξης «κοσμικών σταθερών» στο Σύμπαν, οι οποίες όμως δεν είναι δυνατό να περιγραφούν με απόλυτη ακρίβεια από τα σημερινά Μαθηματικά, αποτελεί ο «Χρυσός Λόγος» ή ο «Χρυσός Κανόνας», δηλαδή ο περίφημος αριθμός Φ. Παρόλο που εμπειρικά ο αριθμός αυτός έχει χρησιμοποιηθεί από την αρχαιότητα, σε διάφορους πολιτισμούς (τουλάχιστον στην αρχαία Αίγυπτο και στην αρχαία Ελλάδα), υπάρχουν συγκεκριμένα παραδείγματα που δείχνουν ακριβώς την «ανακάλυψή» του μέσα από τη μαθηματική ανάλυση φυσικών διαδικασιών.

Ενας από τους πιο γνωστούς μαθηματικούς του 12ου αιώνα, ο Leonardo da Pisa ή αλλιώς γνωστότερος ως Fibonacci, κατά πολλούς ένας από τους πιο ταλαντούχους δυτικούς επιστήμονες του Μεσαίωνα, μελετώντας τις αριθμητικές ακολουθίες (έναν απλό και ταυτόχρονα πολύ σύνθετο τομέα των Μαθηματικών) θέλησε να παρουσιάσει το αντικείμενο της μελέτης του με ένα απλό παράδειγμα που περιελάμβανε ένα νησί, ένα ζεύγος κουνέλια και τη δεινή αναπαραγωγική τους ικανότητα. Από μαθηματική άποψη, το συγκεκριμένο μοντέλο περιγράφει μια σαφώς ορισμένη «αριθμητική πρόοδο», μια ακολουθία αριθμών στην οποία η τρέχουσα τιμή προκύπτει ως άθροισμα δύο ή περισσότερων «προηγούμενων» τιμών, δηλαδή σε προγενέστερες χρονικές στιγμές. Στο παράδειγμα αυτό είναι εύκολο να διατυπώσει κανείς την αντίστοιχη εξίσωση ως:

$\alpha(\nu+2) = \alpha(\nu+1) + \alpha(\nu)$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η αναδρομική έκφραση της «ακολουθίας Fibonacci», που στο προαναφερθέν παράδειγμα εκφράζει το πλήθος των ζευγών που υπάρχουν στο νησί. Ξεκινώντας από τις αρχικές τιμές $\alpha(0)=0$ και $\alpha(1)=1$, η ακολουθία που προκύπτει είναι:

$A = \{ \alpha(i) : i=0,1,2,3,\dots \} = \{ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \}$

Μολονότι με πολύ απλά Μαθηματικά το αρχικό πρόβλημα φαίνεται να λύθηκε, εν τούτοις η παραπάνω αναδρομική έκφραση δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστη. Στην πραγματικότητα, είναι σχεδόν άχρηστη αν θέλουμε να γνωρίζουμε την τιμή της ακολουθίας, δηλαδή το πλήθος των ζευγών, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή και μόνο σε αυτή, χωρίς με άλλα λόγια να δίδονται οι δύο αμέσως προηγούμενες διαδοχικές τιμές της. Πράγματι, αναδρομικές εκφράσεις αυτής της μορφής επιλύονται με συγκεκριμένες μεθόδους που βασίζονται στην έννοια των εξισώσεων διαφορών. Η ακριβής περιγραφή της επίλυσης αποτελεί ακριβώς την «τέχνη» των Μαθηματικών, του συνδυασμού μεθόδων, θεωρημάτων και ιδιοτήτων των αριθμών, αποτυπωμένη στην αυστηρή και απόλυτα σαφή μαθηματική γλώσσα. Στο τελικό αποτέλεσμα της επίλυσης στη συγκεκριμένη περίπτωση της ακολουθίας Fibonacci, η αντίστοιχη εξίσωση περιλαμβάνει ακριβώς τον αριθμό Φ ως κλάσμα αριθμών (το μισό του αθροίσματος της μονάδας συν την τετραγωνική ρίζα του πέντε)

Με άλλα λόγια, όπως και στην περίπτωση του αριθμού e ως βέλτιστη αριθμητική βάση, έτσι και ο αριθμός Φ προκύπτει αυθόρμητα μέσω μιας αμιγώς θεωρητικής μαθηματικής προσέγγισης σε ένα πραγματικό καθημερινό πρόβλημα, το οποίο, ενώ αρχικά φαίνεται πολύ απλό, εν τούτοις κρύβει μια από τις πιο γνωστές και πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις κατά τις οποίες κάποιες ενδογενείς μαθηματικές δομές «απλώς υπάρχουν» και εμφανίζονται αυθόρμητα όταν διατυπωθούν με τον κατάλληλο μαθηματικό τρόπο.

Τυπικά, ο αριθμός Φ ορίζεται ως η αναλογία στην οποία το κλάσμα του αθροίσματος δύο αριθμών προς τον μεγαλύτερο από αυτούς ισούται με το κλάσμα του μεγαλύτερου προς τον μικρότερο αριθμό:

$(\alpha+\beta)/\alpha = \alpha/\beta = \Phi \approx 1{,}61803\dots$

Ομως, το γεγονός ότι εμφανίζεται με εντελώς διαφορετικό τρόπο στην αναλυτική λύση της ακολουθίας Fibonacci δείχνει ακριβώς ότι δεν πρόκειται για κάτι τυχαίο. Μάλιστα, συνδέεται και με μια ακόμη «κοσμική σταθερά» των Μαθηματικών, τον αριθμό π:

$\Phi = (4/\pi)^2$

Ο αριθμός Φ αποτελεί ένα από τα πιο διάσημα μαθηματικά αινίγματα του ανθρώπινου πολιτισμού, σε αμέτρητες εκφράσεις του, εδώ και πάνω από 2.400 χρόνια. Ο Ελληνας γλύπτης Φειδίας τον χρησιμοποίησε ως κανόνα κατά την κατασκευή του Παρθενώνα. Η μεγάλη πυραμίδα της Γκίζας επίσης ενσωματώνει τον αριθμό αυτό στις αναλογίες της. Ο Leonardo da Vinci τον ανέδειξε σε πολλά από τα έργα του, ως την αναλογία που «ευχαριστεί τις αισθήσεις». Στη μουσική εμφανίζεται σε έργα του Debussy και άλλων συνθετών, για τον ίδιο ακριβώς λόγο. Αλλά και σε πιο επιστημονικές ή τεχνικές εφαρμο-

Ο αριθμός Φ αποτελεί ένα από τα πιο διάσημα μαθηματικά αινίγματα του ανθρώπινου πολιτισμού, σε αμέτρητες εκφράσεις του, εδώ και πάνω από 2.400 χρόνια.

Απεικόνιση της Υπατίας της Αλεξάνδρειας, από τον Masolino de Pinacale (1428). Η Υπατία υπήρξε μια από τις σπουδαιότερες γυναίκες φιλοσόφους και μαθηματικούς της Ρωμαϊκής Αιγύπτου, η οποία μεταξύ άλλων ασχολήθηκε με τη διόρθωση του γεωκεντρικού μοντέλου του Πτολεμαίου για τις τροχιές των ουράνιων σωμάτων, αναδιατυπώνοντας τα αντίστοιχα μαθηματικά με διαφορετικό τρόπο (κωνικές τομές) και «ανακαλύπτοντας» μια απλούστερη δομή.

Ο αριθμός Φ αποτελεί ένα από τα πιο διάσημα μαθηματικά αινίγματα του ανθρώπινου πολιτισμού, σε αμέτρητες εκφράσεις του, εδώ και πάνω από 2.400 χρόνια. Ο Ελληνας γλύπτης Φειδίας τον χρησιμοποίησε ως κανόνα κατά την κατασκευή του Παρθενώνα.

γές, χρησιμοποιείται σε αλγορίθμους χρηματιστηριακών συναλλαγών, αναζήτησης σε βάσεις δεδομένων, στη βελτιστοποίηση της απόδοσης σε πρωτόκολλα δικτύων υπολογιστών κλπ. Κάποιοι επιστήμονες μάλιστα έχουν επισημάνει ομοιότητες του Χρυσού Κανόνα με τις αναλογίες που παρατηρούνται στη δομή και τη μορφή του ανθρώπινου DNA.

Οι «κοσμικές» ιδιότητες μαθηματικών και φυσικών σταθερών όπως ο e, ο Φ και ο π, αποκαλύπτουν με τον πιο χαρακτηριστικό ίσως τρόπο ότι η απάντηση στο αρχικό ερώτημα, αν δηλαδή τα Μαθηματικά είναι «εφεύρεση» ή «ανακάλυψη», δεν είναι μονοσήμαντη. Μάλιστα, φαίνεται να ισχύουν ως ένα βαθμό και οι δύο εκδοχές. Η Φύση εμπεριέχει δομές και διαδικασίες που διέπονται από χαρακτηριστικά με ενδογενείς μαθηματικές ιδιότητες, τις οποίες τα δικά μας Μαθηματικά προσπαθούν να «ανακαλύψουν». Ταυτόχρονα, όμως, τα Μαθηματικά αποτελούν ανθρώπινη «επινόηση», έναν εξαιρετικά αποτελεσματικό αλλά κάθε άλλο παρά τέλειο τρόπο αποκωδικοποίησης της πραγματικότητας.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Υπάρχει τελικά απάντηση στο αρχικό ερώτημα για το αν τα Μαθηματικά είναι ανθρώπινη επινόηση ή εγγενής ιδιότητα του κόσμου που μας περιβάλλει; Υπάρχουν άραγε ενδείξεις που να ενισχύουν καθοριστικά τη μία ή την άλλη άποψη;

Οπως και στο ιδεατό παράδειγμα της μοναχικής μέδουσας στον βυθό του απέραντου ωκεανού, υπάρχουν αμέτρητα άλλα παραδείγματα εκατέρωθεν. Μπορεί κάποιος να φανταστεί μια οντότητα που ζει παγιδευμένη σε έναν παράξενο διδιάστατο κόσμο, όπου ενώ κινείται συνεχώς σε ευθεία γραμμή προς την ίδια κατεύθυνση, κάποια στιγμή επιστρέφει στο σημείο αφετηρίας, ξανά και ξανά. Για την οντότητα αυτή, η δική μας Ευκλείδεια γεωμετρία είναι ανεπαρκής προκειμένου να περιγράψει τον κόσμο στον οποίο ζει, καθώς φαίνεται να έχει άπειρη έκταση και ταυτόχρονα, με κάποιο τρόπο, «αναδρομικότητα» στη δομή του. Ομως, για μια άλλη οντότητα που βρίσκεται «έξω» από αυτό τον επίπεδο κόσμο, σε μια τρίτη διάσταση, η απάντηση είναι προφανής: η πρώτη οντότητα απλά κινείται πάνω σε μια σφαίρα, όμως τα Μαθηματικά που αντιλαμβάνεται «εντός» αυτού του διδιάστατου κόσμου δεν επαρκούν για να περιγράψουν την πραγματικότητα όπως ακριβώς είναι.

Ως πραγματικό παράδειγμα της παραπάνω συλλογιστικής μπορεί να αναφερθεί η Υπατία, μια από τις γνωστότερες μαθηματικούς και φιλοσόφους της αρχαιότητας που έζησε στη Ρωμαϊκή Αίγυπτο. Μεταξύ άλλων, ασχολήθηκε επισταμένα με τις κωνικές τομές στη γεωμετρία και με τις κινήσεις των πλανητών, προσπαθώντας να βελτιώσει το γεωκεντρικό μοντέλο του Πτολεμαίου για το ηλιακό σύστημα, θέτοντας ουσιαστικά τις βάσεις για τη λεπτομερέστερη αναδιατύπωση του ηλιοκεντρικού μοντέλου του Αρίσταρχου από τον Κέπλερ πολλούς αιώνες αργότερα. Προσπαθώντας να εξηγήσει την ακριβή πορεία της Σελήνης στον ουρανό σε σχέση με τη Γη και τις αποκλίσεις από το μοντέλο του Πτολεμαίου, μετά από πολλές αναλύσεις κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο που απεικονίζει ακριβώς την πραγματικότητα είναι μια απλούστερη, ελλειψοειδής τροχιά συγκεκριμένης εκκεντρότητας (όχι κυκλική). Με άλλα λό-

Αν και υπάρχουν ενδείξεις, από διάφορους επιστημονικούς τομείς ότι η ανθρώπινη συλλογιστική και αντίληψη οργανώνονται και επεκτείνονται σημαντικά μέσω της μαθηματικής σκέψης, εν τούτοις δεν είναι σαφές κατά πόσο τα ίδια τα Μαθηματικά αποτελούν την αιτία ή το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας.

για, με μια αλλαγή της οπτικής του προβλήματος και ελαφρώς διαφορετικά Μαθηματικά, χρησιμοποιώντας μία και μόνο διαφορετική «κυκλική» τροχιά με δύο κέντρα αντί για δύο πεπλεγμένες κυκλικές τροχιές, το ίδιο πρόβλημα αποκαλύπτεται με εντελώς άλλο τρόπο και η λύση καθίσταται προφανής.

Και τα δύο παραπάνω παραδείγματα είναι δυνατό να ερμηνευτούν με διττό τρόπο, είτε υπέρ είτε κατά, σε σχέση με τη «φορμαλιστική» και την «πλατωνική» αντίληψη, αντίστοιχα, για τα Μαθηματικά. Από τη μια πλευρά, τόσο η κρυμμένη τρισδιάστατη πραγματικότητα στο πρώτο παράδειγμα, όσο και η κατάλληλη κωνική τομή της Υπατίας που αντικαθιστά τις σύνθετες τροχιές του μοντέλου του Πτολεμαίου στο δεύτερο παράδειγμα, μπορούν να ερμηνευτούν ως περιπτώσεις όπου τα Μαθηματικά «απλώς υπάρχουν» στη Φύση και ο άνθρωπος προσπαθεί να τα κατανοήσει διατυπώνοντας τις σωστές εξισώσεις. Ταυτόχρονα όμως, η προσπάθεια αυτή του ανθρώπου και το τελικό αποτέλεσμα, δηλαδή τα αντίστοιχα Μαθηματικά, αποτελούν εν γένει μια αμιγώς ανθρώπινη κατασκευή, μια επινόηση, η οποία προσεγγίζει ως ένα βαθμό (όχι τέλεια) την πραγματικότητα.

Αν και υπάρχουν ενδείξεις, από διάφορους επιστημονικούς τομείς (Νευροφυσιολογία, Τεχνητή Νοημοσύνη, κ.ά.) ότι η ανθρώπινη συλλογιστική και αντίληψη οργανώνονται και επεκτείνονται σημαντικά μέσω της μαθηματικής σκέψης, εν τούτοις δεν είναι σαφές κατά πόσο τα ίδια τα Μαθηματικά αποτελούν την αιτία ή το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας. Κανείς δεν μπορεί να υποστηρίξει με απόλυτη βεβαιότητα ούτε τη μια ούτε την άλλη άποψη, γιατί δεν είναι σαφές σε ποιο βαθμό τα Μαθηματικά που περιγράφουν τη σωστή λύση είναι προγενέστερα ή μεταγενέστερα της ίδιας της λύσης. Με άλλα λόγια, μπορεί η αντίστοιχη λύση να προέκυψε με την «εφεύρεση» ενός καλύτερου μαθηματικού μοντέλου ή, αντίστροφα, το καλύτερο αυτό μαθηματικό μοντέλο να υπήρχε ήδη και απλά να «ανακαλύφθηκε» παρατηρώντας καλύτερα το πρόβλημα. Αλλωστε, οι άνθρωποι όχι μόνο δημιουργούν τα Μαθηματικά που κυρίως λύνουν πραγματικά προβλήματα, αλλά επικεντρώνονται ακριβώς σε διεργασίες και φαινόμενα που οι ίδιοι κατανοούν καλύτερα. Συνεπώς, το ότι τα Μαθηματικά «απλά λετουργούν» δεν αποτελεί από μόνο του απόδειξη ότι η ίδια η δομή της Φύσης και της πραγματικότητας βασίζεται σε αυτά, καθώς την ίδια στιγμή η παρατήρηση αυτή επηρεάζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό από την υποκειμενική και περιορισμένη ανθρώπινη αντίληψη.

Οπως συμβαίνει συχνά στις επιστήμες, όταν δύο εκ διαμέτρου αντίθετες θεωρίες αποδεικνύεται εξίσου πως δεν είναι ούτε απόλυτα σωστές ούτε απόλυτα λανθασμένες, συνήθως η πραγματικότητα βρίσκεται κάπου στο μέσον. Τα Μαθηματικά εξαρτώνται σημαντικά από την ανθρώπινη αντίληψη και ταυτόχρονα βρίσκονται εν μέρει έξω από αυτήν. Ισως σε αυτήν ακριβώς τη μερική παραβίαση της συμπαντικής αρχής της αιτιατότητας να κρύβεται και η ιδιαίτερη ομορφιά τους. ■

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(1) Mario Livio: WHY MATH WORKS, Scientific American, 16 Dec 2011, http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=why-math-works

(2) Wikipedia: BIRTHDAY PROBLEM (article), 14 Jun 2012, http://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_paradox

(3) Wikipedia: GOLDEN RATIO (article), 14 Jun 2012, http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

(4) Λ. Κυρούσης, Χ. Μπούρας, Π. Σπυράκης: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ, Εκδ. Gutenberg, 1992.

(5) Mario Livio: THE STRUCTURE OF EVERYTHING, The Washington Post – Book World, 27 Feb 2009, http://www.powells.com/review/2009_02_27.html

(6) Julie Rehmeyer: STILL DEBATING WITH PLATO: WHERE DO MATHEMATICAL OBJECTS LIVE?, Science News, 25 Apr 2008

(7) Robert Lawrence Kuhn: IS MATHEMATICS INVENTED OR DISCOVERED?, Science and Religion Today, 1 Apr 2010

(8) Paul P. Mealing: IS MATHEMATICS INVENTED OR DISCOVERED?, Journeyman Philosopher, 2 Sept 2007, http://journeymanphilosopher.blogspot.com

(9) Christopher Wink: THE GOLDEN RATIO – BY MARIO LIVIO (book review), 26 Aug 2011, http://christopherwink.com

(10) Don Berry: MATHEMATICS – DISCOVERED OR INVENTED?, 16 Dec 2011, http://www.starmind.com/en/question/1295/Mathematics-Discovered-or-Invented

(11) Barry Mazur: MATHEMATICAL PLATONISM AND ITS OPPOSITES, European Mathematical Society Newsletter, n. 68, pp. 19-21

(12) Paul Ernest: IS MATHEMATICS DISCOVERED OR INVENTED?, 16 Dec 2011, http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome12/article2.htm

(13) Joshua Hill: IS MATHEMATICS DISCOVERED OR INVENTED?, Canada Free Press, 16 Dec 2011, http://www.canadafreepress.com/index.php/print-friendly/2805

(14) MATHEMATICS: DISCOVERED OR INVENTED? (article), The Root Problem, 29 Jan 2011, http://therootproblem.blogspot.com/2011/01/mathematics-invented-or-discovered.html

(15) Eugene Wigner: THE UNREASONABLE EFFECTIVENESS OF MATHEMATICS IN THE NATURAL SCIENCES, Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, n. 1, Feb 1960, John Wiley and Sons, New York.

(16) Roger Penrose: THE ROAD TO REALITY – A COMPLETE GUIDE TO THE LAWS OF THE UNIVERSE, Jonathan Cape, 2004

(17) Vincent Wen: ARE THE TRUTHS OF MATHEMATICS INVENTED OR DISCOVERED?, 2009, http://www.aristotle.utoronto.ca/2009third.pdf

(18) R. Penrose, St. Hawking, A. Shimony, N. Cartwright: THE LARGE, THE SMALL AND THE HUMAN MIND, Cambridge University Press, 2000

(19) Brian Hayes: THIRD BASE, American Scientist, Nov-Dec 2001, http://www.americanscientist.org/issues/num1/2001/6/third-base/1

(20) Wikipedia: e (mathematical constant) (article), 14 Jun 2012, http://en.wikipedia.org/wiki/E_%28mathematical_constant%29

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΤΕ ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΚΕΡΔΙΣΤΕ!

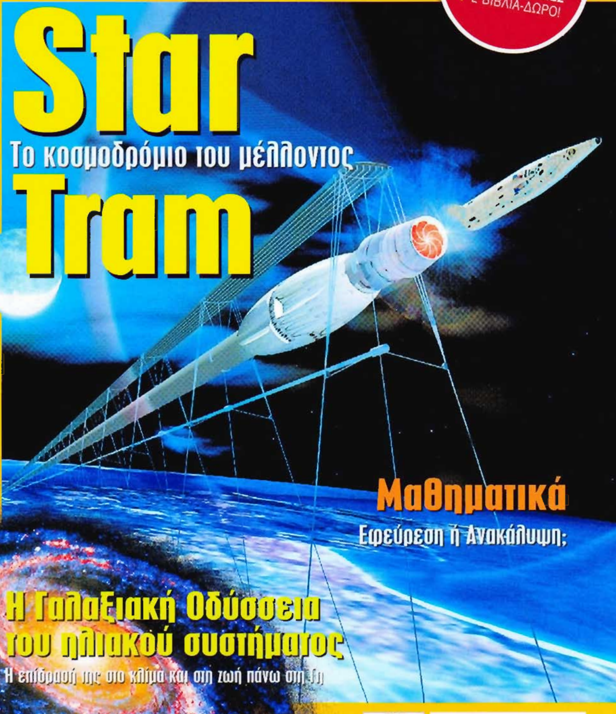
ΠΕΡΙΟΔΟΣ Β' • ΤΕΥΧΟΣ 365 • ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2012 • €7,00

ΠΕΡΙΣΚΟΠΙΟ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Προσοχή τσουνάμι!
Πώς λειτουργούν τα Κέντρα Έγκαιρης Προειδοποίησης

Γήρανση των τρανζίστορ
Εμπόδιο στη μελλοντική εξέλιξή τους

Υπερλεξία
Πρόωρη αναγνωστική ικανότητα ή διαταραχή;



Star Tram
Το κοσμοδρόμιο του μέλλοντος

Μαθηματικά
Εφεύρεση ή Ανακάλυψη;

Η Γαλαξιακή Οδύσσεια του ηλιακού συστήματος
Η επίδρασή της στο κλίμα και στη ζωή πάνω στη Γη